Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 13/6/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (8 punti)
Sia $x\colon \Omega \to U \subseteq S$ una parametrizzazione di un aperto U di una superficie S. Si dia la definizione dei simboli di Christoffel $\Gamma^1_{1,1}, \Gamma^2_{1,1}$ associati a tale parametrizzazione, e si dimostri che $\Gamma^1_{1,1}, \Gamma^2_{1,1}$ sono intrinseci.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco avente triedro di Frenet (t, n, b), curvatura κ e torsione τ. Si supponga inoltre $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$, e sia $a\colon I \to \mathbb{R}$ definita da

$$a(s) = \arctan \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} \ .$$

(i) Si mostri che, per ogni $s \in I$, si ha

$$\|n'(s)\|^2 = \kappa(s)^2 + \tau(s)^2 \ ,$$

per cui in particolare $n'(s) \neq 0$.

(ii) Si mostri che, per ogni $s \in I$, si ha

$$\frac{\langle n(s) \wedge n'(s), n''(s)\rangle}{\|n'(s)\|^2} = a'(s) \ .$$

(iii) Sia $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ un'altra curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco avente torsione τ_β tale che $\tau_\beta(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$, e sia n_β il versore normale di β. Si supponga che $n_\beta(s) = n(s)$ per ogni $s \in I$, e che esista $s_0 \in I$ tale che $\tau(s_0) = \tau_\beta(s_0)$. Si dimostri che le curve α e β sono congruenti.

Soluzione. (i): Per le formule di Frenet si ha $n' = -\kappa t - \tau b$ da cui, essendo t, b ortonormali,

$$\|n'(s)\|^2 = \| - \kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s)\|^2 = \kappa(s)^2 + \tau(s)^2 \ .$$

Poiché $\tau(s) \neq 0$, questo implica in particolare che $n'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$.

(ii): Derivando l'equazione $n' = -\kappa t - \tau b$ e sfruttando ancora le formule di Frenet si ottiene

$$n'' = -\kappa' t - \kappa^2 n - \tau' b - \tau^2 n = -\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2)n - \tau' b \ .$$

D'altronde

$$n \wedge n' = n \wedge (-\kappa t - \tau b) = -\tau t + \kappa b \ ,$$

per cui

$$\langle n \wedge n', n''\rangle = \kappa' \tau - \kappa \tau'$$

e

$$\frac{\langle n(s) \wedge n'(s), n''(s)\rangle}{\|n'(s)\|^2} = \frac{\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s)}{\kappa(s)^2 + \tau(s)^2} \ .$$

D'altronde,

$$a'(s) = \frac{(\kappa/\tau)'(s)}{1 + (\kappa/\tau)^2(s)} = \frac{(\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s))/\tau(s)^2}{(\kappa(s)^2 + \tau(s)^2)/\tau(s)^2)} = \frac{\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s)}{\kappa(s)^2 + \tau(s)^2} ,$$

da cui la tesi.

(iii): Sia $a_\beta\colon I \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $a_\beta(s) = \arctan(\kappa_\beta(s)/\tau_\beta(s))$, dove κ_β è la curvatura di β. Poiché $n_\beta = n$ (e dunque $n'_\beta = n'$ e $n''_\beta = n''$), per quanto visto al punto (ii) si ha $a'_\beta(s) = a'(s)$ per ogni $s \in I$. Inoltre, da $n'(s_0) = n'_\beta(s_0)$ si ha, per quanto visto in (i),

$$\kappa(s_0)^2 + \tau(s_0)^2 = \|n'(s_0)\|^2 = \|n'_\beta(s_0)\|^2 = \kappa_\beta(s_0)^2 + \tau_\beta(s_0)^2 .$$

Da $\tau(s_0) = \tau_\beta(s_0)$ si ha allora, usando che κ e κ_β sono positivi in ogni istante, anche $\kappa(s_0) = \kappa_\beta(s_0)$, per cui $a(s_0) = a_\beta(s_0)$. Le funzioni a e a_β coincidono pertanto in s_0, ed hanno derivata uguale su tutto I, per cui coincidono su tutto I. Usando anche il punto (i) ed il fatto che la funzione arcotangente è iniettiva abbiamo allora

$$\kappa(s)^2 + \tau(s)^2 = \kappa_\beta(s)^2 + \tau_\beta(s)^2 , \qquad \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\kappa_\beta(s)}{\tau_\beta(s)}$$

per ogni $s \in I$. Poiché la curvatura è sempre positiva, dalla seconda uguaglianza segue anche che $\tau(s)$ e $\tau_\beta(s)$ hanno lo stesso segno per ogni $s \in I$.

Riscrivendo la prima uguaglianza come

$$\tau(s)^2 \left(1 + \frac{\kappa(s)^2}{\tau(s)^2}\right) = \tau_\beta(s)^2 \left(1 + \frac{\kappa_\beta(s)^2}{\tau_\beta(s)^2}\right)$$

e usando la seconda si ottiene $\tau(s)^2 = \tau_\beta(s)^2$, da cui $\tau(s) = \tau_\beta(s)$ in quanto τ e τ_β hanno lo stesso segno. Da ciò e dalla seconda uguaglianza si ottiene allora $\kappa(s) = \kappa_\beta(s)$ per ogni $s \in I$. La conclusione segue allora dal Teorema Fondamentale delle Curve.

Esercizio 3. (11 punti)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva $\gamma\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (t+1, 0, t^3)$.

(i) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.

(ii) Siano $q = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$. Si mostri che $q \in S$ e $v \in T_qS$.

(iii) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo contenente 0, e sia $\alpha\colon I \to S$ una geodetica con $\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = v$. Si mostri che $z(\alpha(t)) \geq 0$ per ogni $t \in I$.

Soluzione. (i): Come visto a lezione, la superficie S ammette la parametrizzazione $x\colon \mathbb{R} \times (-1,1) \to S$ data da

$$x(u,v) = ((v+1)\cos u, (v+1)\sin u, v^3) .$$

Si ha

$$x_u = (-(v+1)\sin u, (v+1)\cos u, 0) , \quad x_v = (\cos u, \sin u, 3v^2) ,$$

per cui la prima forma fondamentale è data da

$$I = \begin{pmatrix} (v+1)^2 & 0 \\ 0 & 1+9v^4 \end{pmatrix} .$$

Inoltre

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(3v^2\cos u, 3v^2 \sin u, -1)}{\sqrt{9v^4+1}}$$

e

$$x_{uu} = (-(v+1)\cos u, -(v+1)\sin u, 0)\,, \quad x_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)\,, \quad x_{vv} = (0,0,6v)\ ,$$

per cui la seconda forma fondamentale è data da

$$II = \frac{1}{\sqrt{9v^4+1}} \begin{pmatrix} -3v^2(v+1) & 0 \\ 0 & -6v \end{pmatrix}\ .$$

La curvatura gaussiana è data perciò da

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{18v^3}{(9v^4+1)^2(v+1)}$$

(ii): Si ha $q = x(0,0)$ e $v = x_u(0,0)$, da cui la tesi.

(iii): Per il Teorema di Clairaut, se denotiamo con $\varphi(t)$ e con $R(t)$ l'angolo formato da $\alpha'(t)$ ed il parallelo passante per $\alpha(t)$ e la distanza di $\alpha(t)$ dall'asse z, allora la quantità $R(t)\cos\varphi(t)$ è costante. Ora abbiamo $\varphi(0) = 0$ ed $R(0) = 1$, per cui $R(t)\cos\varphi(t) = 1$ per ogni t, ed $R(t) \geq 1$ per ogni t, in quanto il coseno varia tra -1 ed 1. Ora, la distanza del punto $x(u,v) \in S$ dall'asse z è data da $\sqrt{(v+1)^2\cos^2 u + (v+1)^2\sin^2 u} = v+1$, ed è perciò maggiore o uguale a 1 se e solo se $v \geq 0$. Poiché la terza coordinata di $x(u,v)$ è uguale a v^3, ciò equivale al fatto che la terza coordinata di $x(u,v)$ sia non negativa, come richiesto.