Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 17/1/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (10 punti)
Sia S la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s)) ,$$

dove $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ sono funzioni C^∞ e $\varphi(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Si supponga inoltre che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco. Sia inoltre $x\colon \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ l'usuale parametrizzazione locale per S, data da

$$x(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) ,$$

e sia infine $\alpha\colon J \to S$ una curva data da $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, dove $u\colon J \to \mathbb{R}$ e $v\colon J \to I$ sono funzioni lisce.

(i) Si mostri che

$$\langle x_u, x_{uv}\rangle = \varphi(v)\varphi'(v) , \qquad \langle x_v, x_{uu}\rangle = -\varphi(v)\varphi'(v) ,$$
$$\langle x_u, x_{uu}\rangle = \langle x_u, x_{vv}\rangle = \langle x_v, x_{uv}\rangle = \langle x_v, x_{vv}\rangle = 0 .$$

(ii) Si mostri che α è una geodetica di S se e solo se

$$\begin{cases} u''(t) = -\frac{2\varphi'(v(t))}{\varphi(v(t))} u'(t)v'(t) \\ v''(t) = \varphi(v(t))\varphi'(v(t))(u'(t))^2 . \end{cases}$$

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (12 punti)
Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\gamma(s) = \cos\frac{s}{2}\left(\cos s, \sin s, \sqrt{3}\right) .$$

(i) Si mostri che γ è regolare, e si dica se sia parametrizzata per lunghezza d'arco.
(ii) Si calcoli la curvatura di γ in ogni punto, e si dica se sia biregolare.
(iii) Si mostri che esiste un'isometria $r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che inverte l'orientazione ed è tale che $\gamma(-s) = r(\gamma(s))$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.
(iv) Si usi il punto precedente per dimostrare che $\tau(s) = -\tau(-s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, dove τ è la torsione di γ.

Soluzione.
(i): Si ha

$$\gamma'(s) = \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2}\cos s - \cos\frac{s}{2}\sin s, -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2}\sin s + \cos\frac{s}{2}\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2}\right) ,$$

ed un semplice calcolo mostra che $\|\gamma'(s)\| = 1$, per cui γ è parametrizzata per lunghezza d'arco, ed in particolare è regolare.

(ii): Un semplice calcolo mostra che

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{5}{4}\cos\frac{s}{2}\cos s + \sin\frac{s}{2}\sin s, -\frac{5}{4}\cos\frac{s}{2}\sin s - \sin\frac{s}{2}\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{2}{s}\right) ,$$

per cui

$$\|\gamma''(s)\|^2 = \frac{7}{4}\cos^2\frac{s}{2} + \sin^2\frac{s}{2} = 1 + \frac{3}{4}\cos^2\frac{s}{2}$$

e

$$\kappa(s) = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\cos^2\frac{s}{2}} > 0$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$. In particolare, γ è biregolare.

(iii): Poiché il seno è dispari mentre il coseno è pari, si ha $\gamma(-s) = r(\gamma(s))$, dove $r(x, y, z) = (x, -y, z)$. Essendo una riflessione, r è chiaramente un'isometria che inverte l'orientazione.

(iv): Sia $\beta = r \circ \gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $i(s) = -s$. Come visto a lezione, si ha $\tau_\gamma(s) = \tau_{\gamma\circ i}(-s)$ e $\tau_{r\circ\gamma}(s) = -\tau_\gamma(s)$ (in quanto r inverte l'orientazione). La tesi segue allora dal fatto dimostrato al punto precedente che $r \circ \gamma = \gamma \circ i$.

Vediamo anche una dimostrazione diretta del punto (iv). Sia t, n, b il triedro di Frenet di γ. Derivando la relazione $\gamma(-s) = r(\gamma(s))$ si ottiene $-\gamma'(-s) = r(\gamma'(s))$, cioè

$$-t(-s) = r(t(s)) ,$$

da cui derivando ancora e normalizzando,

$$n(-s) = r(n(s))$$

e

$$b(-s) = t(-s) \wedge n(-s) = -r(t(s)) \wedge r(n(s)) = r(t(s) \wedge n(s)) = r(b(s))$$

(si ricordi che r inverte l'orientazione!). Derivando quest'ultima uguaglianza si ottiene

$$-b'(-s) = r(b'(s)) ,$$

per cui

$$\tau(-s)n(-s) = b'(-s) = -r(b'(s)) = -r(\tau(s)n(s)) = -\tau(s)n(-s) ,$$

e dunque $\tau(-s) = -\tau(s)$.

Esercizio 3. (8 punti)
Si consideri la funzione $x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$x(u, v) = ((1 + u)v, (1 - u)v, u) .$$

(i) Si mostri che x è la parametrizzazione globale di una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.
(ii) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.
(iii) Si mostri che, se $F \colon S \to S$ è un'isometria, allora $F(0) = 0$.

Soluzione.
(i): Sia $S = x(\mathbb{R}^2)$. È chiaro che x è liscia, per cui basta osservare che la mappa

$$(x, y, z) \mapsto \left(z, \frac{x + y}{2}\right) ,$$

che è ovviamente C^∞ su $\mathbb{R}^3$, dunque su S, fornisce un'inversa insiemistica di $x \colon \mathbb{R}^2 \to S$.

(ii): Si ha

$$x_u = (v, -v, 1) , \quad x_v = (1 + u, 1 - u, 0) ,$$

da cui

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(u-1, u+1, 2v)}{\sqrt{4v^2 + 2u^2 + 2}} \ .$$

Inoltre,

$$x_{uu} = x_{vv} = 0\,, \quad x_{uv} = (1, -1, 0) \ ,$$

per cui le matrici di prima e seconda forma fondamentale sono rispettivamente

$$I = \begin{pmatrix} 2v^2+1 & 2uv \\ 2uv & 2u^2+2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{4v^2+2u^2+2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

La curvatura di Gauss K è data allora da

$$K(x(u,v)) = \frac{\det II}{\det I} = -\frac{4}{(4v^2+2u^2+2)^2} = -\frac{1}{(2v^2+u^2+1)^2} \ .$$

(iii): Poiché la curvatura Gaussiana è una grandezza intrinseca, se $F\colon S \to S$ è un'isometria allora $K(F(x)) = K(x)$. Osserviamo ora che $K(0) = K(x(0,0)) = -1$, e che, poiché $2v^2 + u^2 + 1 > 1$ per ogni $(u,v) \neq (0,0)$, $K(x(u,v)) > -1$ per ogni $(u,v) \neq 0$. Ne segue che necessariamente $F(0) = 0$.