Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 14/6/2017

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. Siano $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e $v \in T_pS$. Si dimostri che esistono $\varepsilon > 0$ ed una geodetica $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ di S tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Soluzione.

Svolto a lezione.

Esercizio 2.

Siano $\gamma_1, \gamma_2\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ curve biregolari aventi triedri di Frenet (t_1, n_1, b_1) e (t_2, n_2, b_2) rispettivamente. Si assuma che γ_1 sia parametrizzata per lunghezza d'arco (mentre γ_2 può non esserlo), e che valga la seguente condizione: per ogni $s \in (a, b)$, $\gamma_1(s) \neq \gamma_2(s)$ e la retta congiungente $\gamma_1(s)$ con $\gamma_2(s)$ è la retta normale sia di γ_1 (in $\gamma_1(s)$) sia di γ_2 (in $\gamma_2(s)$). (Si ricordi che la retta normale di una curva in un punto è la retta affine passante per il punto e avente come giacitura il versore normale della curva).

(i) Si mostri che la distanza tra $\gamma_1(s)$ e $\gamma_2(s)$ non dipende da s.

(ii) Si mostri che esistono $\alpha, \beta\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che

$$t_2(s) = \alpha(s)t_1(s) + \beta(s)b_1(s) \ .$$

(iii) Si mostri che l'angolo formato da $\gamma_1'(s)$ e $\gamma_2'(s)$ non dipende da $s \in (a, b)$ (suggerimento: si consideri la derivata dell'uguaglianza del punto (ii)).

Soluzione.

(i): Le condizioni imposte implicano che esiste una funzione liscia $r\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(s) + r(s)n_1(s)$$

per ogni $s \in (a, b)$. Derivando questa uguaglianza e utilizzando le formule di Frenet, dette κ e τ la curvatura e la torsione di γ_1, si ottiene

$$\gamma_2'(s) = t_1(s) + r'(s)n_1(s) + r(s)(-\kappa(s)t_1(s) - \tau(s)b_1(s)) \ .$$

Prendendo ora il prodotto scalare con $n_1(s)$ e utilizzando il fatto che $n_1(s) = \pm n_2(s)$ è ortogonale a $\gamma_2'(s)$ si ottiene $0 = r'(s)$, che è equivalente alla tesi.

(ii) discende dal fatto che $n_2(s) = \pm n_1(s)$, per cui $t_2(s)$ appartiene all'ortogonale di $n_1(s)$, che è generato da $t_1(s)$ e $b_1(s)$.

(iii): Derivando l'uguaglianza data in (ii), al membro sinistro si ottiene un multiplo di $n_2(s) = \pm n_1(s)$, mentre al memebro destro si ha

$$\alpha'(s)t_1(s) + \alpha(s)\kappa(s)n_1(s) + \beta'(s)b_1(s) + \beta(s)\tau(s)n_1(s) \ ,$$

che è un multiplo di $n_1(s)$ solo se $\alpha'(s) = \beta'(s) = 0$. Dunque

$$\langle t_1(s), t_2(s)\rangle = \alpha(s)$$

è costante, e ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 3.

Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1,\, x > 0, y > 0\} \ .$$

(i) Si mostri che S è una superficie e se ne dia una parametrizzazione globale.

(ii) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.

Soluzione.

(i) L'insieme S è il grafico della funzione $(x, y) \mapsto 1/(xy)$ definita su $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, ed è pertanto una superficie con parametrizzazione globale

$$x\colon (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad x(u, v) = (u, v, 1/(uv)) \ .$$

(ii): Si ha

$$x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{u^2 v} \end{pmatrix} \,, \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{uv^2} \end{pmatrix} \,, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2 v} \\ \frac{1}{uv^2} \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \frac{u^2 + v^2}{u^4 v^4}}$$

e

$$x_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \,, \quad x_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{u^2 v^2} \end{pmatrix} \,, \quad x_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \,,$$

per cui le matrici della prima e della seconda forma fondamentale sono rispettivamente

$$I = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{u^4 v^2} & \frac{1}{u^3 v^3} \\ \frac{1}{u^3 v^3} & 1 + \frac{1}{u^2 v^4} \end{pmatrix} \,, \quad II = \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{u^4 v^4}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{1}{u^2 v^2} \\ \frac{1}{u^2 v^2} & \frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \ .$$

Dunque la curvatura gaussiana di S nel punto $(u, v, 1/(uv))$ è data da

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{3u^4 v^4}{(u^4 v^4 + u^2 + v^2)^2} \ .$$