Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 12/1/2017

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1 (10 punti). Sia S una superficie connessa orientata in $\mathbb{R}^3$, e si supponga che:

(i) Per ogni $p \in S$, le due curvature principali di S in p coincidano.

(ii) Esista $p \in S$ tale che la curvatura Gaussiana di S in p sia strettamente positiva.

Si mostri che S è contenuta in una sfera (di opportuni centro e raggio).

Soluzione. L'esercizio è stato svolto a lezione.

Esercizio 2 (8 punti). Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco, e sia $\alpha(t) = \gamma'(t)$. Sia inoltre $t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma$ il triedro di Frenet di γ, e siano $\kappa_\gamma, \tau_\gamma$ la curvatura e la torsione di γ, e κ_α la curvatura di α.

(i) Si mostri che α è una curva regolare e che, detto t_α il versore tangente di α, si ha $t_\alpha(s) = n_\gamma(s)$ per ogni $s \in I$.

(ii) Si mostri che, se $v\colon J \to I$ è un diffeomorfismo crescente tale che $\alpha \circ v$ sia parametrizzata per lunghezza d'arco, allora $v'(t) = 1/\kappa_\gamma(v(t))$ per ogni $t \in J$.

(iii) Si mostri che

$$\kappa_\alpha(s) = \sqrt{1 + \frac{\tau_\gamma(s)^2}{\kappa_\gamma(s)^2}}$$

per ogni $s \in I$.

Soluzione. (i): Si ha $\alpha(s) = t_\gamma(s)$, per cui $\alpha'(s) = \kappa_\gamma(s) n_\gamma(s)$ e $\|\alpha'(s)\| = \kappa_\gamma(s)$. Poiché γ è biregolare, $\kappa_\gamma(s) > 0$, e α è regolare. Inoltre, $t_\alpha(s) = \alpha'(s)/\|\alpha'(s)\| = n_\gamma(s)$.

(ii): Per quanto visto in (i), si ha

$$1 = \|(\alpha \circ v)'(t)\| = \|(\alpha'(v(t)) \cdot v'(t)\| = \kappa_\gamma(v(t)) \cdot v'(t) \ ,$$

da cui, essendo $v'(t) > 0$, la tesi.

(iii): Per definizione, la curvatura di α in $v(t)$ è uguale alla curvatura di $\alpha \circ v$ in t. Inoltre, il versore tangente di $\alpha \circ v$ (in t) coincide con il versore tangente di α (in $v(t)$), che per (i) è dato da $n_\gamma(v(t))$. Dunque

$$\kappa_\alpha(v(t)) = \|(n_\gamma \circ v)'(t)\| = \|n'_\gamma(v(t)) \cdot v'(t)\| = \frac{1}{\kappa_\gamma(v(t))} \|n'_\gamma(v(t))\| \ .$$

Per le formule di Frenet, $n'_\gamma(v(t)) = -\kappa_\gamma(v(t)) n_\gamma(v(t)) - \tau_\gamma(v(t)) b_\gamma(v(t))$, per cui $\|n'_\gamma(v(t))\| = \sqrt{\kappa_\gamma(v(t))^2 + \tau_\gamma(v(t))^2}$. Dunque per ogni $s \in I$, posto $t = v^{-1}(s)$ si ha

$$\kappa(s) = \kappa_\alpha(v(t)) = \frac{1}{\kappa_\gamma(v(t))} \sqrt{\kappa_\gamma(v(t))^2 + \tau_\gamma(v(t))^2} = \sqrt{1 + \frac{\tau_\gamma(s)^2}{\kappa_\gamma(s)^2}} \ ,$$

che è la tesi.

Esercizio 3 (12 punti). Siano $S_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dotato dell'usuale metrica euclidea, e sia

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, z^2 = 3(x^2 + y^2)\} \ .$$

Sia $f\colon S_1 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sqrt{3(x^2+y^2)}}{2} \right) ,$$

e, per ogni $R > 0$ e ogni $v \in S^1$, si considerino le curve $\alpha_R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\beta_v\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ date da

$$\alpha_R(t) = \left(R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R} \right) , \quad \beta_v(t) = tv .$$

(i) Si mostri che S_2 è una superficie e che $f(S_1) \subseteq S_2$.

(ii) Si mostri che f è un'isometria locale (suggerimento: per ogni $p \in S_1$, si mostri che esistono $R > 0, v \in S^1$ tali che α_R e β_v si intersechino in p, e si calcoli il differenziale di f sui vettori tangenti a queste curve).

(iii) Si determini la geodetica massimale γ di S_2 tale che $\gamma(0) = (1,0,\sqrt{3})$ e $\gamma'(0) = (0,1,0)$.

Soluzione. (i): Il differenziale della funzione $(x,y,z) \mapsto 3(x^2+y^2) - z^2$ si annulla solo in 0, che non appartiene a S_2, per cui S_2 è una superficie. Inoltre, è immediato verificare che i punti della forma $f(x,y)$ verificano l'equazione di S_2 per cui $f(S_1) \subseteq S_2$.

(ii): Ogni $p \in S_1$ è della forma $p = R_0 v_0$, con $R_0 > 0$ e $v_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \in S^1$, e $p = \alpha_{R_0}(R_0\theta_0) = \beta_{v_0}(R_0)$. Ora $\alpha'_{R_0}(R_0\theta_0) = (-\sin\theta_0, \cos\theta_0)$, mentre $\beta'_{v_0}(R_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, per cui $\alpha'_{R_0}(R_0\theta_0)$ e $\beta'_{v_0}(R_0)$ costituiscono una base ortonormale di T_pS_1. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(\alpha_R(t)) &= \left(\frac{R^2\cos^2(t/R) - R^2\sin^2(t/R)}{2R}, \frac{R^2\cos(t/R)\sin(t/R)}{R}, \frac{\sqrt{3}R}{2} \right) \\ &= \left(\frac{R\cos(2t/R)}{2}, \frac{\sin(2t/R)}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2} \right) , \end{aligned}$$

e che, se $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, allora

$$f(\beta_v(t)) = \left(\frac{t^2\cos^2\theta - t^2\sin^2\theta}{2t}, \frac{t^2\cos\theta\sin\theta}{2t}, \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) = \left(\frac{t\cos 2\theta}{2}, \frac{t\sin 2\theta}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) .$$

Se ne deduce che $df_p(\alpha'_{R_0}(R_0\theta_0)) = (f\circ\alpha_{R_0})'(R_0\theta_0) = (-\sin 2\theta_0, \cos 2\theta_0, 0)$ e $df_p(\beta'_{v_0}(R_0)) = (f\circ\beta_{v_0})'(R_0) = (\cos(2\theta_0)/2, \sin(2\theta_0)/2, \sqrt{3}/2)$. Dunque df_p porta una base ortonormale di T_pS_1 su una base ortonormale di $T_{f(p)}S_2$, ed è perciò un'isometria.

(iii): Osserviamo che, posti $p = (2,0)$ e $v = (0,1)$, si ha $(1,0,\sqrt{3}) = f(p)$ e $(0,1,0) = df_p(v)$. Poiché f è un'isometria locale, f porta geodetiche in geodetiche, per cui la geodetica richiesta è l'immagine tramite f della geodetica di S_1 che parte da p con velocità iniziale v. Tale geodetica è ovviamente la retta $t \mapsto (2,t)$, per cui la geodetica richiesta è

$$t \mapsto f(2,t) = \left(\frac{4-t^2}{2\sqrt{4+t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}, \frac{\sqrt{3(4+t^2)}}{2} \right) .$$