Esercizio 1.

Sappiamo che $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Di conseguenza:

$$e^{1/z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{per } |z|\neq 0.$$

Questa è l'espansione in serie di Laurent:

$$e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{con } a_n = \frac{1}{(-n)!} \text{ per } n\leq 0,\ a_n = 0 \text{ per } n>0$$

Sia $P(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ un polinomio con $a_d \neq 0$. Sappiamo che $P(z)e^{1/z}$ è una funzione intera se e solo se $\exists\, \rho>0$ tale che $P(z)e^{1/z}$ è limitata per $z\in B(0,\rho)$, $|z|\neq 0$.

Adesso, $P(z)e^{1/z} = P(z)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$. Quindi il coefficiente di $\frac{1}{z^N}$, con $N>0$, è

$$c_{-N} = \left(\frac{a_d}{(d+N)!} + \frac{a_{d-1}}{(d-1+N)!} + \dots + \frac{a_0}{N!}\right)$$

Se $P(z)e^{1/z}$ fosse limitata, esisterebbe $M>0$ t.c. $|P(z)e^{1/z}|<M$, quindi

$$|c_{-N}| \leq r^N M \quad \forall\, r\neq 0$$

D'altro canto, sia $s = \min\{s : a_s \neq 0\}$, allora

$$c_{-N} = \frac{1}{(N+s)!}\left[a_s + \frac{a_{s+1}}{N+s+1} + \dots + \frac{a_d}{(N+s+1)\cdots(N+d)}\right]$$

Visto che $a_s\neq 0 \Rightarrow |c_{-N}|$ non può essere arbitrariamente piccolo. $\square$

Esercizio 2:

Sia $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$. Determinare la serie di Laurent centrata in zero in

1. $|z|<1$
2. $|z|>1$

Svolgimento:

$$\frac{z}{1+z^3} = z \frac{1}{1-(-z^3)} = z \sum_{n=1}^{\infty} (-z^3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{3n+1} \quad \text{in } |z|<1$$

$$\frac{z}{1+z^3} = z \frac{1}{1+z^3} = z \frac{\left(\frac{1}{z^3}\right)}{\left(\frac{1}{z^3}\right)(1+z^3)} = \frac{z}{z^3} \frac{1}{\left(\frac{1}{z^3}+1\right)} = \frac{z}{z^3} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{-3n-2} \quad \text{per } |z|>1$$

Esercizio 3:

Sia $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Determinare la serie di Laurent di f, centrata in zero, in

1. $|z|<1$
2. $1<|z|<2$
3. $|z|>2$

Svolgimento:

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

con A e B da determinare.

$$Az-2A+Bz-B = 1 \iff A+B=0, \ -2A-B=1$$

$$B=-A \Rightarrow -2A+A=1 \Rightarrow -A=1 \Rightarrow A=-1, \ B=1$$

Allora

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

- $|z|<1$:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad ; \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

- $1<|z|<2$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

- $|z|>2$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

Esercizio 4:

$$f(z)=\sum_{n\geq 1} \frac{1}{z^2+n^2}$$

definisce una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ e determinare l'insieme dei poli.

Svolgimento:

$S=\{\dots,-2i,-i,i,2i,\dots\}$. Sia $R>0$, $N>2R$ e scriviamo

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z^2+n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$$

Dato che

$$\frac{1}{z^2+n^2}=\frac{1}{(z-in)(z+in)}=\left(\frac{1}{z-in}\right)\left(\frac{1}{z+in}\right)$$

$\Rightarrow \frac{1}{z^2+n^2}$ ha un polo semplice in in e in $-in$ $\forall\, n\leq N$. Allora

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z^2+n^2}$$

è una somma di funzioni meromorfe con poli semplici. D'altro canto,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$$

è olomorfa per $|z|<R$. Infatti per $|z|<R$ e $n>N$:

$$\left|\frac{1}{z^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2-|z|^2} \leq \frac{1}{n^2-R^2}$$

Adesso

$$\frac{1}{n^2-R^2}=\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{R}{n}\right)^2}$$

Abbiamo assunto $n>N>2R \Rightarrow \frac{R^2}{n^2}<\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\frac{R^2}{n^2}>\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{n^2-R^2}<\frac{4}{3} \Rightarrow \left|\frac{1}{z^2+n^2}\right| \leq \frac{4}{3n^2}$$

Visto che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto abbiamo che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$$

converge uniformemente $\forall z \in C$ compatto arbitrario all'interno del disco. Per l'esercizio 4 del foglio esercizi 4 $\Rightarrow$ definisce una funzione analitica, quindi olomorfa.

Esercizio 5:

Mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ è analitica in $\{z : |z+i| \leq 1\}$.

Svolgimento:

Sia $0<s<1$. Sia $z \in \{w : |w+i| \leq s\} \Rightarrow |z+i| \leq s$. D'altro canto

$$|z-i| + |-z-i| \geq |-2i| \Rightarrow |z-i| \geq |-2i| - |z+i| \geq 2-s$$

Quindi

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq \frac{s}{2-s}$$

Usiamo il criterio del confronto. Vediamo che la serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{s}{2-s}\right)^n \text{ converge}$$

perché $0 < \frac{s}{2-s} < 1$. Usando l'esercizio 4 del foglio 4 si conclude.

Esercizio 6: Calcolare il residuo in zero delle seguenti funzioni:

- $\frac{z^2+1}{z}$
- $\frac{z^2+3z-5}{z^3}$
- $\frac{\sin z}{z^4}$

Ricordiamo che se $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^K}$ $\Rightarrow$ $Res(f, z_0) = g^{(K-1)}(z_0)\frac{1}{(K-1)!}$

$f(z) = \frac{z^2+1}{z}$ $\Rightarrow g(z) = z^2+1 \Rightarrow Res(f,0) = g(0) = 1$

$f(z) = \frac{z^2+3z-5}{z^3} \Rightarrow g(z) = z^2+3z-5,\ g'(z) = 2z+3,\ g''(z) = 2 \Rightarrow Res(f,0) = \frac{1}{2!}g''(0) = 1$

$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \Rightarrow Res(f,0) = \frac{d^2}{dz^2}\sin z\Big|_{z=0} = 0$

Esercizio 7:

Trovare il residuo in i della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4-1}$$

Calcolare l'integrale $\int_C f(z)$ per C circonferenza di raggio $1/2$, centrata in i.

Svolgimento:

$z^4-1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z+i)(z-i)$. Quindi

$$f(z) = g(z)\frac{1}{z-i} \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)}$$

$Res(f,i) = g(i) = \frac{1}{(i^2-1)(2i)} = -\frac{1}{4i} \rightsquigarrow \int_C f(z) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right)$

Esercizio 8:

Calcolare i seguenti integrali sulla circonferenza di raggio 8 e centro l'origine:

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)}dz \quad , \quad \int_C \frac{1}{1-\cos(z)}dz$$

Svolgimento

La funzione $\frac{1}{\sin(z)}$ ha poli nei punti $z = K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$. Visto che tali poli sono semplici, usiamo una formula vista a lezione:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)}, 0\right) = \frac{1}{\frac{d}{dz}\sin z\big|_0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{1}{\sin(z)}\,dz = 2\pi i$$

Ricordiamo che $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, quindi

$$1-\cos(z) = 1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right) = \frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}-\dots$$

$$= \frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{2!}{6!}z^4-\dots\right)$$

Quindi,

$$\frac{1}{1-\cos(z)} = \frac{2}{z^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)} =$$

$$= \frac{2}{z^2}\left[1+\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)+\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)^2+\dots\right]$$

Qual è il termine a_{-1} dell'espansione di Laurent in 0?

$$a_{-1} = 0$$

(È possibile osservare che il residuo di $\frac{1}{1-\cos(z)}$ in $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, è sempre zero per periodicità). Quindi, l'integrale che vogliamo calcolare è nullo.

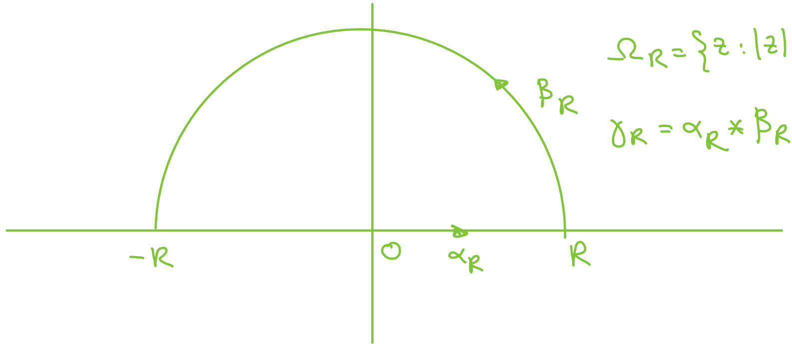
Esercizio 9:

Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$

Svolgimento:

Consideriamo



$\Omega_R = \{z : |z| \le R,\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$

$\gamma_R = \alpha_R * \beta_R$ param. di $\partial\Omega_R$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$

Adesso, poniamo $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz \right) = \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega_R} f(z)\,dz - \int_{\beta_R} f(z)\,dz \right)$$

$f(z)$ ha due poli semplici nel semipiano superiore, cioè $e^{\frac{\pi i}{4}}$ e $e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Usando la formula con la derivata del denominatore, vista a lezione, si ha

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = \frac{\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^2}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{e^{\pi i/2}}{4e^{3\pi i/4}}$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{3\pi i/4}\right) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}}{4e^{9\pi i/4}}$$

Applicando il teorema dei residui:

$$\int_{\partial\Omega_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi i/2}}{4e^{3\pi i/4}} + \frac{e^{3\pi i/2}}{4e^{9\pi i/4}} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Adesso osserviamo che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)\,dz = 0$$

Infatti

$$\left| \int_{B_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_{B_R} |f(z)|\,dz \leq \pi \frac{B}{R}$$

utilizzando argomenti simili a quelli visti a lezione col prof. Frigerio

per una costante positiva B.

Concludendo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$$