Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 18 del 22/04/2020

1. Le seguenti funzioni elementari $f(x)$ ammettono primitive elementari $F(x)$ su ogni intervallo aperto contenuto nel loro insieme di definizione. Determinare esplicitamente queste primitive usando le regole di base dell'integrazione indefinita.

(1) $f(x) = e^{2x}\sin(3x)$
(2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
(3) $f(x) = \tan(2x)$
(4) $f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$
(5) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$
(6) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$
(7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
(8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$
(9) $f(x) = \tan^2(x)$
(10) $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{1-2\sin^2(x)}$
(11) $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti.

(1) $\int_{-1}^{1} e^{-|x|}(x^2+2x)dx$
(2) $\int_0^{\pi} x|\cos(x)|dx$
(3) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos^2(x)}dx$
(4) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$
(5) $\int_0^1 x^2\arctan(x)dx$
(6) $\int_0^{\pi/3} x^2\sin(x)dx$

3. Vero o falso?

(1) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se f è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, allora f ammette una primitiva.
(2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se f ammette una primitiva, allora f è integrabile su ogni $[a,b]\subset\mathbb{R}$.
(3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Se $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una primitiva di f su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora F è una primitiva di f su tutto $\mathbb{R}$.
(4) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Se F è una primitiva di f su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\lim_{x\to 0}F(x) = L\in\mathbb{R}$, allora F si estende ad una primitiva di f su tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ sia definita la funzione integrale

$$F(x) = F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

(1) Dimostrare che F è continua.
(2) Dimostrare che se f è continua in punto $a \in \mathbb{R}$, allora F è derivabile in a e $F'(a) = f(a)$.
(3) È vero che se F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, allora è una primitiva di f?

Suggerimento per i primi due punti: adattare la dimostrazione del teorema fondamentale.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{e^x}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

(1) Determinare l'intervallo aperto massimale $I \subset \mathbb{R}$ su cui è definita la funzione integrale $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

(2) Determinare gli zeri e il segno di $F(x)$.
(3) Studiare l'andamento qualitativo di $F(x)$ (intervalli di monotonia, convessità, asintoti ecc.) e tracciarne il grafico.

6. Fissato $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, sia a_n, $n \geq 1$, la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} (\frac{m}{n})^k$$

Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{k+1}$$

Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{\frac{mk}{n}}$$

Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n^2 + m^2}$$

Suggerimento:
Identificare i limiti con opportuni integrali definiti di funzioni continue.

7. Determinare le primitive delle seguenti funzioni razionali.

(1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2(x-2)}$
(2) $f(x) = \frac{x^4+9x^2+x+16}{x^4+8x^2+16}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}$

8. Razionalizzare i seguenti integrali indefiniti.

(1) $\int \frac{1}{2\sin(x)+\cos(x)}dx$
(2) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}dx$
(3) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$
(4) $\int \frac{1+e^x+e^{2x}}{e^{4x}}dx$
(5) $\int \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^3(x)}dx$
(6) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}dx$
(7) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

9. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann.
(a) Mostrare che anche le funzioni

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)), \ \min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

sono integrabili secondo R.
(b) Sia $[c, d] \subset [a, b]$, dimostrare che la restrizione $f|_{[c,d]}$ è integrabile secondo R.

10. Ricordiamo che $X \subset [a, b]$ è *misurabile* se la sua funzione indicatrice $1_X : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo R. In tal caso $\mu(X) := \int_a^b 1_X dx$ è la sua misura.

(a) Dimostrare che se $X, Y \subset [a, b]$ sono misurabili allora anche $X \cap Y$ e $X \cup Y$ sono misurabili.
(b) $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

Suggerimento: Usare quanto stabilito nell'esercizio 9.