Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 16 del 02/04/2020

1. Determinare il tipo (convergente, divergente o irregolare) delle seguenti serie a termini positivi. Se possibile determinare o stimare la somma. Suggerimenti: in diversi casi sarà utile confrontare la serie data con $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ per una scelta opportuna di $a>0$. In certi casi si può tentare di ottenere un confronto utile usando il "Lemma di condensazione".

(1) Al variare del parametro intero $p>0$, $\sum_{n\geq 1}\frac{p}{n^2+pn}$
(2) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{3^n}$
(3) $\sum_{n\geq 0}\frac{7^n}{n!}$
(4) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$
(5) $\sum_{n\geq 1}6^n(\frac{n-3}{n})^{n^2}$
(6) $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$
(7) $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$
(8) $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$
(9) $\sum_{n\geq 1}\frac{n\sqrt{n}}{n^3+1}$
(10) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3+1}$
(11) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$
(12) $\sum_{n\geq 1}\frac{\log(n)}{n^2}$
(13) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2\sqrt[n]{2}}{3n^2+n}$
(14) $\sum_{n\geq 0}\sqrt[n]{\frac{n^3}{n!}}$
(15) $\sum_{n\geq 2}\frac{n}{n^2-2}$
(16) Al variare del parametro $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{x^{2n}}$
(17) Al variare del parametro $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{e^{nx}}{n}$
(18) $\sum_{n\geq 0}(\pi/2-\arctan(n))$
(19) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(1/n)}{n}$
(20) $\sum_{n\geq 1}\log(1+1/n)\sin(1/n)$

2. (a) Sia $\sum_{n\geq 0}a_n$ una serie a termini positivi. Sia $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strettamente crescente, $k(n):=k_n$. Poniamo $b_n=\sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1}a_n$ Dimostrare che $\sum_{n\geq 0}a_n$ converge se e solo se $\sum_{n\geq 0}b_n$ converge e, in tal caso, le due serie hanno la stessa somma.

(b) Supponiamo ora che $\sum_{n\geq 0}a_n$ sia con termini di segno arbitrario e assolutamente convergente. Sia b_n definito come prima. È vero che allora anche $\sum_{n\geq 0}b_n$ è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa somma?

(c) Supponiamo ora che $\sum_{n\geq 0}a_n$ sia con termini di segno arbitrario e che esista k_n come sopra tale che $\sum_{n\geq 0}b_n$ sia assolutamente convergente. È vero che allora anche $\sum_{n\geq 0}a_n$ è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa somma?

(d) Supponiamo che $\sum_{n\geq 0} a_n$ sia con termini di segno arbitrario e assolutamente convergente. È vero che $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ è convergente?

(e) Sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ a termini positivi. Supponiamo che $a_n \to 0$ per $n \to \infty$. Dimostare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva tale che la serie $\sum_{n\geq 0} a_{k_n}$ sia convergente. In particolare, si consideri $a_n = 1/(n+1)$.

3. Determinare il tipo (convergente, divergente, irregolare, assolutamente convergente) delle seguenti serie a termini di segno arbitrario. Suggerimento: in certi casi può essere utile incorporare i termini della serie in una funzione e utilizzare il calcolo differenziale.

(1) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n^2+1}$
(2) $\sum_{n\geq 2} \log(1 + \frac{(-1)^n}{n})$
(3) $\sum_{n\geq 2} \sin((-1)^n/\log(n))$
(4) Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} n(\sin(x))^n$
(5) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(1/n)+\cos(n\pi)}{n}$
(6) $\sum_{n\geq 1} \sin(n^2)\cos(n\pi)\sin(1/n^2)\cos(1/n)$
(7) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(e^{2/n} - e^{1/n})$
(8) $\sum_{n\geq 1} \log(n)/n$

5. Nei seguenti esercizi è utile riconoscere la serie numerica come serie di potenze nota calcolata in un punto del suo intervallo di convergenza.

(1) Dimostrare che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n} = \log(2)$.
(2) Determinare le prime due cifre decimali della somma della serie $\sum_{n\geq 1} \frac{4^n}{(2n+1)!}$

6. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare la serie di Taylor di centro $x_0 = 0$ e il suo raggio di convergenza. Discutere se f è analitica in un intorno di $x_0 = 0$.

(1) $f(x) = xe^x$.
(2) $f(x) = e^{1+x^2}$
(3) $f(x) = \sin(x^2)$

7. Per ciascuna delle seguenti serie di potenze, determinare il raggio di convergenza R. Se R è finito, determinare il comportamento della serie nei punti $\pm R$.

(1) $\sum_{n\geq 0} x^n$
(2) $\sum_{n\geq 1} x^n/n$
(3) $\sum_{n\geq 1} x^n/n^2$

8. Si consideri la serie di potenze di centro $x_0 = 0$, $x^0 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

- Carcolare il raggio di convergenza R.
- Calcolare la serie derivata.
- Posta $S : I(0, R) \to \mathbb{R}$ la funzione somma, calcolare $(x^2 S'(x))'$
- Calcolare $S(x)$.