Teoria dei nodi. Secondo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

28 ottobre 2011

1. Siano $g, n \geq 0$, e siano $\alpha, \alpha' \in H_1(S_{g,n})$ tali che $i(\alpha, \gamma) = i(\alpha', \gamma)$ per ogni $\gamma \in H_1(S_{g,n})$.
   - Se $n \leq 1$, si mostri che $\alpha = \alpha'$.
   - La tesi del punto precedente rimane vera se $n > 1$?

2. Sia D il diagramma di un link orientato L, e sia K una componente di L. Siano $a_1, \ldots, a_n$ gli archi di D che appartengono a K e siano $C_1, \ldots, C_n$ gli incroci di D tali che il punto finale di a_i si trovi in C_i. Per ogni i siano inoltre ε_i il segno dell'incrocio C_i e b_i l'arco di D che passa sopra a K in C_i.

   Si consideri ora la presentazione di Wirtinger di $\pi_1(C(L))$ associata a D, sia x_i il generatore associato a b_i, e sia y_1 il generatore associato ad a_1. Sia infine N uguale alla somma degli ϵ_i per cui b_i giaccia su K. Si mostri che l'elemento

   $$y_1^{-N} \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in \pi_1(C(L))$$

   corrisponde ad una longitudine di K.

3. Sia K un nodo, e sia K' una curva semplice chiusa non banale in $\partial C(K)$. Si mostri che $K \cup K'$ è un boundary link se e solo se K' è una longitudine di K.

4. Siano $L = K_1 \cup K_2$ e $L' = K_1' \cup K_2'$ due link a due componenti. È vero che $C(L) \cong C(L')$ implica $lk(K_1, K_2) = \pm lk(K_1', K_2')$?