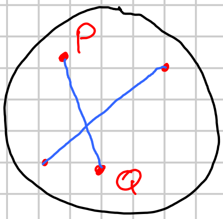
Titolo nota 26/03/2020

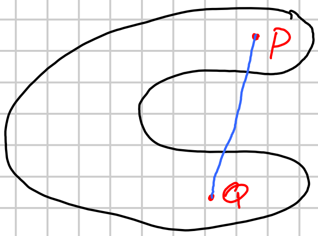
Lezione 27 marzo

Funzioni concave / convesse.

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ del piano cartesiano è convesso se, $\forall$ coppia di punti $P, Q \in C$, tutto il segmento che congiunge P e Q è contenuto in C.



convesso

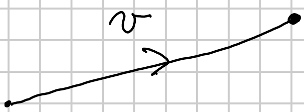


non convesso

Dati $Q = (x_0, y_0)$, $P = (x_1, y_1)$, il segmento PQ è dato da tutti e soli i punti della forma

$$tP + (1-t)Q = (tx_0 + (1-t)x_1,\ ty_0 + (1-t)y_1) =$$

$$= (x_1, y_1) + t\underbrace{(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1)}_{Q-P=v},\quad t \in [0,1]$$

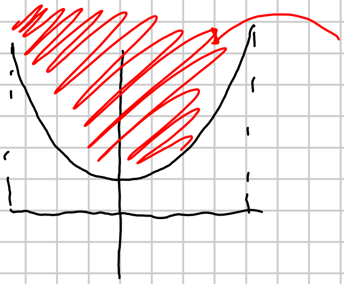


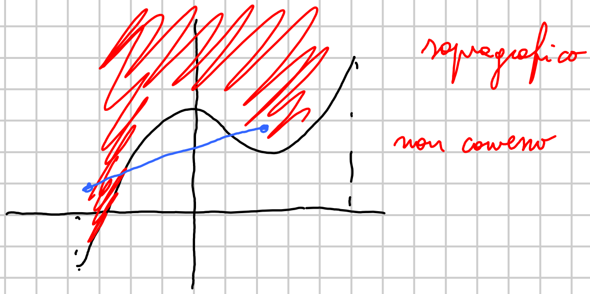
$Q = (x_0, y_0)$

$P = (x_1, y_1)$

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (eventualmente illimitato).

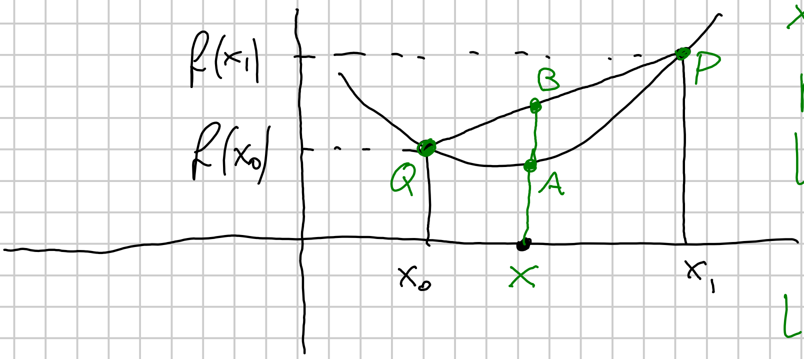
Def.: $f : I \to \mathbb{R}$ è CONVESSA se il sopragrafico di f è convesso, cioè se è convesso l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x \in I,\ y \geq f(x)\}$.





In formule, deve accadere che $\forall\, x_0, x_1 \in I$

$$\underbrace{f(t x_0 + (1-t) x_1)}_{\substack{\text{ascissa del generico}\\ \text{punto } x \in [x_0, x_1]}} \le \underbrace{t f(x_0) + (1-t) f(x_1)}_{\substack{\text{ordinata del punto}\\ \text{del segmento tra } (x_0, f(x_0)) \text{ e } (x_1, f(x_1))\\ \text{di ascissa } x = t x_0 + (1-t) x_1}} \qquad \forall t \in [0,1]$$



$x = t x_0 + (1-t) x_1$, per qualche $t \in [0,1]$.

L'ordinata di A è $f(x) = f(t x_0 + (1-t) x_1)$

L'ordinata di B è $t f(x_0) + (1-t) f(x_1)$

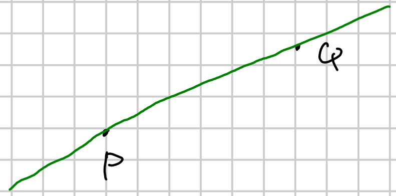
La condizione di convessità è esattamente

$$\text{ordinata}(A) \le \text{ordinata}(B), \text{ cioè}$$

$$f(t x_0 + (1-t) x_1) \le t f(x_0) + (1-t) f(x_1)$$

(Basta testare la convessità su coppie di punti del grafico).

NOTA: Il segmento tra P e Q è dato dai punti del tipo $Q + t(P-Q) = tP + (1-t)Q$ al variare di $t \in [0,1]$. Se faccio variare $t \in \mathbb{R}$, ottengo tutta la retta che passa per P e Q



In maniera equivalente, visto che la retta tra $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ha equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$y = f(b) + \overbrace{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}}^{=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}(x-b),$$

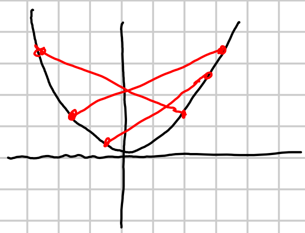
f è convessa $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(b) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b).$$

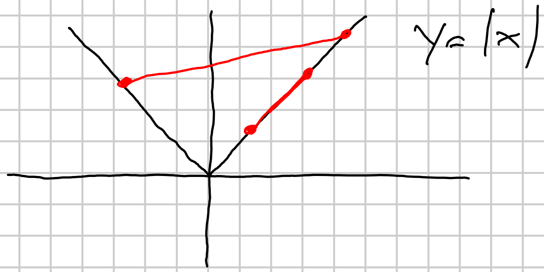
Def.: $f : I \to \mathbb{R}$ si dice <u>strettamente convessa</u> se vale $f(tx_0 + (1-t)x_1) < t f(x_0) + (1-t) f(x_1)$

$$\forall t \in (0,1)$$

(cioè il segmento tra $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ incontra il grafico solo negli estremi).



strettamente convessa



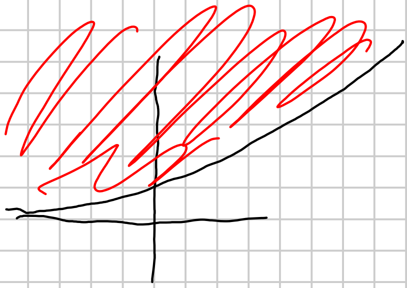
convessa, ma non strettamente

Def.: $f : I \to \mathbb{R}$ è CONCAVA se $-f$ è convessa.

cioè se il SOTTOGRAFICO di f è convesso,

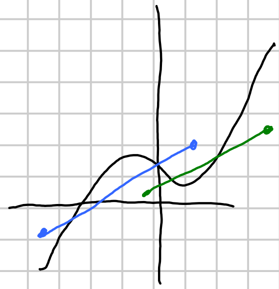
cioè $f(tx_0+(1-t)x_1) \geq tf(x_0)+(1-t)f(x_1)$

$\forall x_0, x_1 \in I$, $\forall t \in [0,1]$.



f convessa

f concava



f né concava né convessa

Teorema: $f: I \to \mathbb{R}$ convessa (o concava)

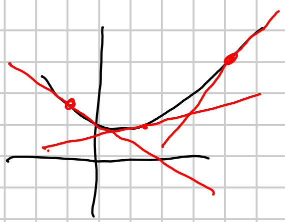
bordo di I o frontiera di I cioè gli estremi di I

Allora f è continua in ogni punto $x \in I \setminus \partial I$ (se $\partial I = \emptyset$, per esempio se $I = \mathbb{R}$, è continua ovunque).

Teorema: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa $\Longleftrightarrow$ f' è crescente.

(E f concava $\Longleftrightarrow$ f' è decrescente).

Dim.:



$\Longrightarrow$ Sia f convessa, e fissiamo $a, b \in I$ con $a < b$.

Voglio vedere $f'(a) \leq f'(b)$. $\forall x \in (a,b)$, per convessità

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \Longrightarrow$$

$$f(x)-f(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \implies \quad (x-a>0\,!)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in (a,b).$$

Prendendo il limite per $x \to a^+$, ottengo

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

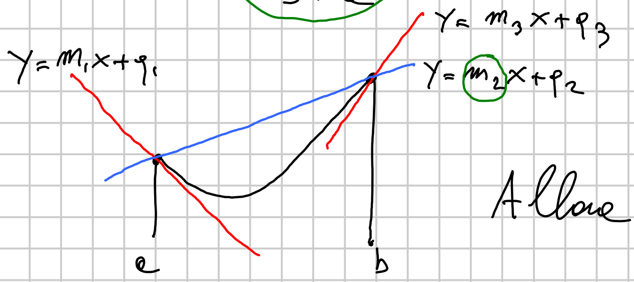
Analogamente, per convessità ho

$$f(x) \le f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \implies \quad (\text{occhio ai segni!})$$

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \ge \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$, da cui, prendendo il limite per $x \to b^-$,

$$f'(b) \ge \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ Dunque

$$f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b)$$, come voluto.



Allora $m_1 \le m_2 \le m_3$

$\Longleftarrow$ Assumo f' crescente. Dato $x \in (a,b)$, applico Lagrange su $[a,x]$ e poi su $[x,b]$, ottenendo

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_1), \qquad a < c_1 < x,$$

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(c_2), \qquad x<c_2<b$$

Dunque, poiché f' è crescente, $f'(c_1) \le f'(c_2)$, cioè

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \text{ da cui}$$

$$(f(x)-f(a))(b-x) \le (f(b)-f(x))(x-a)$$

Ora si possono svolgere i conti, e verificare che questa disuguaglianza è equivalente a

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \text{ dunque } f \text{ è convessa.}$$

$\square$

Corollario: $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte, allora f è convessa $\iff f''(x) \ge 0 \ \forall x \in I$

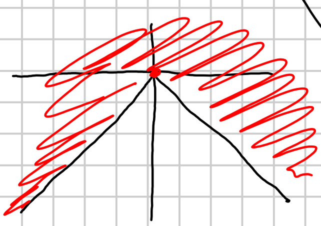
Dim.: f convessa $\iff f'$ crescente $\iff (f')' \ge 0$ per i teoremi di monotonia.

Attenzione: Non tutte le funzioni convesse sono derivabili, né derivabili due volte.

Esempio: $f(x) = -|x|$, f è derivabile infinite volte ovunque tranne che in 0, e $f''(x) \ge 0 \ \forall x \ne 0$.

in realtà è $=0$

Però f non è convessa.

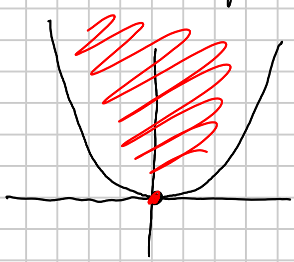


Def.: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \setminus \partial I$ è un PUNTO DI FLESSO se f è concava in un intorno destro di x_0 e convessa in un intorno sinistro di x_0, o viceversa.

Proposizione: Se $f: I \to \mathbb{R}$ ha derivata seconda continua, e x_0 è di flesso, allora $f''(x_0)=0$.

Dim.: $f''(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0, e
$f''(x) \leq 0$ " " " " sinistro di x_0, o viceversa. Per continuità di f'', necessariamente $f''(x_0)=0$.

Il viceversa è falso! Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, per cui f è convessa e non concava sia in $(-\infty,0)$ sia in $(0,+\infty)$, e dunque 0 non è un flesso. Ma $f''(0)=0$.



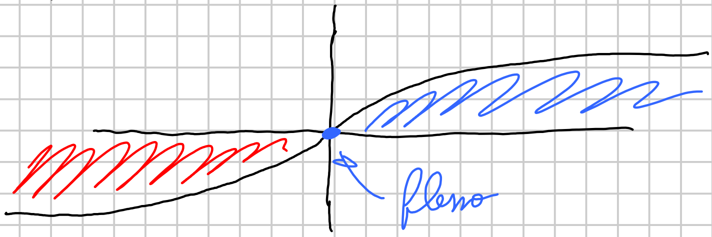
Esempi: $f(x)=e^x$. Poiché $f''(x)=e^x>0$ $\forall x$, f è convessa in tutto $\mathbb{R}$.

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\log x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$,
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ $\forall x \in (0,+\infty)$, dunque f è

concava in tutto $(0,+\infty)$

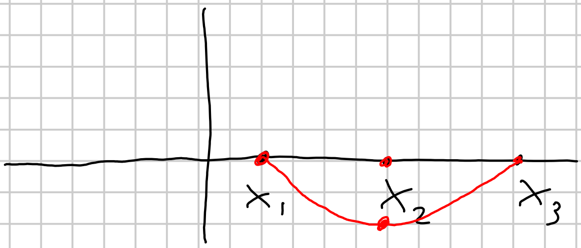
$f(x) = \arctan x$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,

perciò $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$, per cui f è convessa in $(-\infty, 0)$ e concava in $(0,+\infty)$, e ha un flesso in 0.



Prop.: $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Abbiamo visto che f convessa $\iff f''(x) \geq 0 \ \forall x$.
Inoltre, se $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$, allora f è STRETTAMENTE convessa. Il viceversa non vale: $f(x) = x^4$ è strettamente convessa, ma $f''(0) = 0$.

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Allora l'equazione $f(x) = 0$ ha al massimo 2 soluzioni.
Infatti, se per assurdo esistessero 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 con $x_1 < x_2 < x_3$, avremmo che,



essendo f strettamente convessa, poiché $f(x_1)=0$, $f(x_3)=0$, dovremmo avere $f(x)<0 \quad \forall x\in(x_1,x_3)$.

Dunque $f(x_2)=0$ è assurdo.

Applicazioni del polinomio di Taylor con resto di Lagrange.

Ex.: Approssimare e a meno di 10^{-4} con un numero razionale.

Sia T_n il polinomio di Taylor di grado n di $f(x)=e^x$ sviluppato in 0. Per il Teorema sul resto di Lagrange, applicato a $x>0$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<c<x.$$

Poiché $f(x)=e^x$, $f^{(i)}(x)=e^x \ \forall i\in\mathbb{N}$, per cui

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<c<x.$$

Pongo $x=1$ e ho

$$e=e^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1^k+\frac{e^c}{(n+1)!}1^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}, \qquad 0<c<1$$

Poiché $c\leq 1$

Dunque $$\left|e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}\right|\leq\frac{e}{(n+1)!}\leq\frac{3}{(n+1)!}$$

Dunque per stimare e a meno di 10^{-4}, basta vedere per quali n ho $\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4} = \frac{1}{10000}$

$6! = 720 \qquad 8! = 56 \cdot 720$, dunque

$$\frac{3}{8!} = \frac{3}{56 \cdot 720} = \frac{1}{56 \cdot 240} < \frac{1}{10000}.$$

Dunque $\left| e - \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} \right| < \frac{3}{8!} < 10^{-4}$, perciò l'approssimazione richiesta è

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

FUNZIONI ANALITICHE

Torniamo alla formula, valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k}_{=\,T_n} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad c \text{ è tra } 0 \text{ e } x.$$

T_n n-esimo polinomio di Taylor dell'esponenziale

Domanda: Fissato x, è vero che $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = e^x$?

Le funzioni per cui ciò accade si chiamano ANALITICHE (circa: per essere precisi, vogliamo $\lim_{n \to +\infty} T_n(f, 0)(x) = f(x)$ solo $\forall x$ in cui il limite esiste).

Fatto: Tutte le funzioni elementari (trigonometriche, esponenziale, logaritmo, ...) sono analitiche.

Dimostriamolo per l'esponenziale.

Devo mostrare che, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{= T_n(\exp, 0)(x)} = e^x$$

Per quanto visto sopra, (supponendo per semplicità $x > 0$)

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{\overset{\leq e^x}{e^c}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq$$

$$\leq e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

A x fissato, e^x è costante, e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

(fattoriale batte potenza). Dunque

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$, cioè

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Per esempio, se $x = 1$,

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots}$$

somma infinita (limite di una successione di somme finite), che in matematica si chiama SERIE.