Lezione 25 marzo

Titolo nota 25/03/2020

ASINTOTI

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione, $D \subseteq \mathbb{R}$.
Un asintoto di f è una retta cui il grafico di f si avvicina sempre di più al variare di $x \in D$.

asintoto orizzontale (destro)

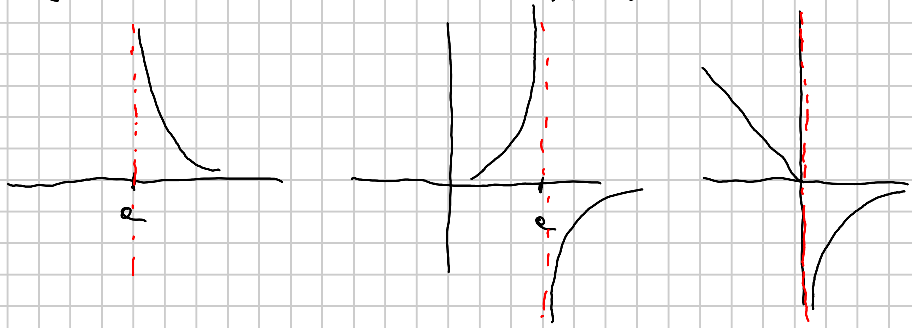
asintoto verticale

asintoto obliquo

Def.: La retta $y = a$ è un asintoto orizzontale destro (risp. sinistro) di f se $D \supseteq (M, +\infty)$ (risp. $D \supseteq (-\infty, M)$) per qualche $M \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ (risp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$).

Def.: La retta $x = a$ è un asintoto verticale se $D \supseteq (a, a+\varepsilon)$ o $D \supseteq (a-\varepsilon, a)$ (o entrambi)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$



Osservazione: Se $a \in D$ e f è continua in a, allora f è limitata in un intorno di a, dunque non può avere $x=a$ come asintoto verticale.
Perciò, se $x=a$ è un asintoto verticale, o $a \notin D$, o $a\in D$ ma f non è continua in a.

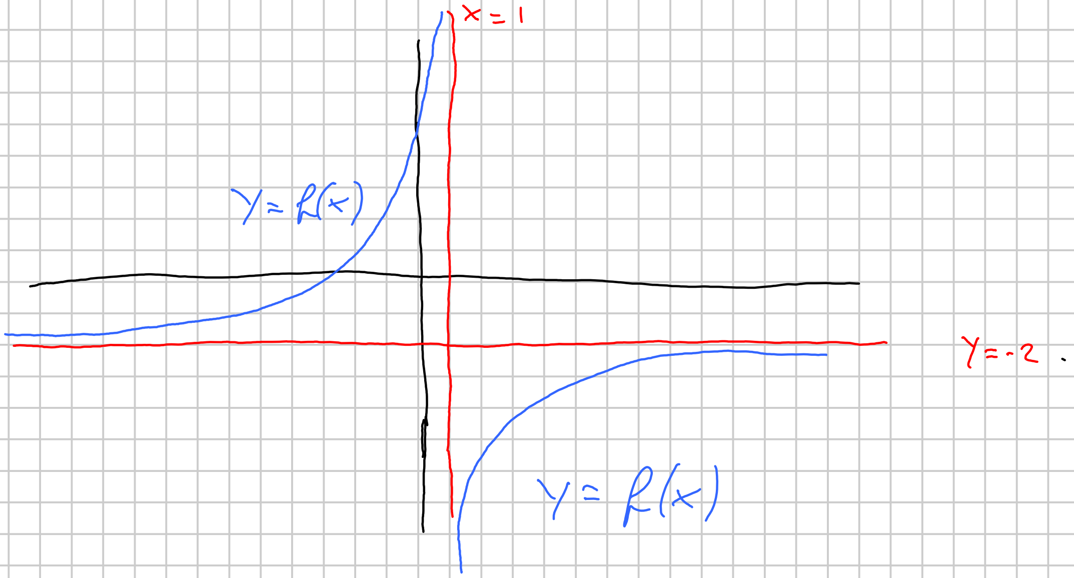
Esempi: ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan x$.
Essendo definita e continua su $\mathbb{R}$, non ha asintoti verticali. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale sinistro.

② $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{5+2x}{1-x}$.
Laddove è definita, f è continua, perciò può avere asintoti verticali solo in $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{5+2x}{1-x} = \frac{7}{0^-} = -\infty,$$ dunque la retta $x=1$ è un asintoto verticale.
(Vale anche che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5+2x}{1-x} = -2, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5+2x}{1-x} = -2,$$

per cui la retta $y=-2$ è un asintoto orizzontale sia destro sia sinistro.



con $m \neq 0$

Def.: la retta $y = mx+q$ è un asintoto obliquo destro se $D \supseteq (M,+\infty)$ per qualche $M\in\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} |f(x)-(mx+q)| = 0$. Analoga definizione per l'asintoto obliquo sinistro, con $-\infty$ al posto di $+\infty$.

Esempi di studi di funzione.

AVVERTENZA: Negli esercizi sullo studio di funzione, rispondete alle domande poste (e solo a quelle!).

① Sia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$.

ⓐ Determinare gli asintoti di f.

(b) Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti di f.

(c) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare il numero di soluzioni di $|xe^{-\frac{1}{x}}| = \lambda$.

(a): Laddove è definita, la funzione è continua, dunque l'unico asintoto verticale, se esiste, è la retta $x=0$.

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0^+ \cdot e^{-\frac{1}{0^+}} = 0^+ \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = 0^- \cdot e^{+\infty} \quad \text{forma indeterminata}$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Poiché $x \to 0^-$, $y \to \frac{1}{0^-} = -\infty$,

e $$\lim_{x \to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y} e^{-y} = \lim_{z \to +\infty} \frac{e^z}{-z} =$$

$$= -\lim_{z \to +\infty} \frac{e^z}{z} = -\infty.$$

Dunque la retta $x=0$ è un asintoto verticale.

Per cercare asintoti orizzontali/obliqui devo calcolare i limiti a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = (+\infty) \cdot e^{-0} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

($\Rightarrow$ no asintoto orizzontale destro)

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = (-\infty) \cdot e^{0} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty$$

($\Rightarrow$ no asintoto orizzontale sinistro).

Come si cercano gli asintoti obliqui?

Teorema: la retta $y=mx+q$ è un asintoto obliquo destro per $f \iff f$ è definita in $(M,+\infty)$ e $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, ed $\exists \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=q$.

(e analogamente per gli asintoti sinistri con $-\infty$ al posto di $+\infty$).

Dim.: $\Longrightarrow$ Se $y=mx+q$ è asintoto obliquo destro allora $\lim_{x\to+\infty}|f(x)-mx-q|=0$, da cui

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-q)=0$. Dunque, a maggior ragione,

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-mx-q}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\underbrace{-\frac{q}{x}}_{\to 0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right), \text{ perciò } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m.$$

Inoltre, se $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-q)=0$, allora sommando q si ha $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=q$.

$\Longleftarrow$ Dal fatto che $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=q$ si deduce $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-q)=0$ e $\lim_{x\to+\infty}|f(x)-mx-q|=0$, che è la tesi.

Torniamo all'esercizio, cioè a $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$.

Per cercare asintoto obliquo destro, calcolo

$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$. Pongo $m=1$, e calcolo $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} (x e^{-\frac{1}{x}} - 1\cdot x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} x(e^{-\frac{1}{x}}-1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y}(e^{-y}-1) =$

$y=\frac{1}{x}$

$= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{-y}-1}{y} = -1$. Dunque f ha come asintoto obliquo destro la retta $y = x-1$.

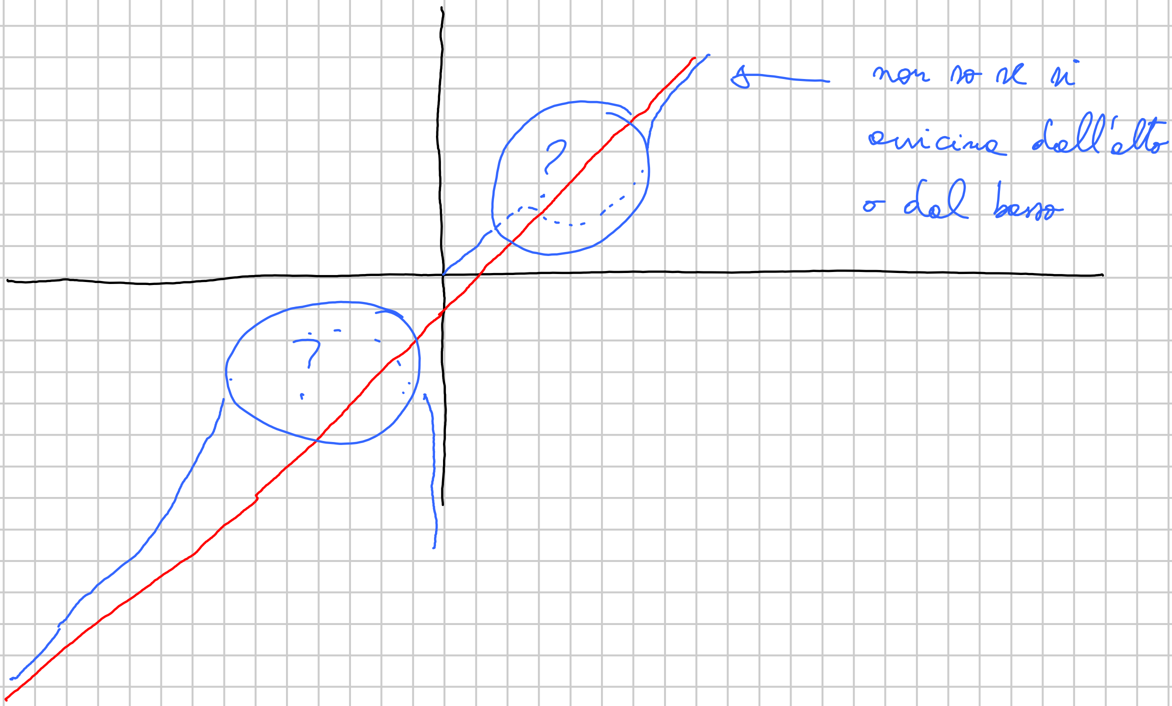
Gli stessi calcoli mostrano che anche

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = -1$,

per cui $y=x-1$ è anche asintoto obliquo sinistro.

Ricapitolando: $x=0$ asintoto verticale

$y=x-1$ asintoto obliquo sia destro sia sinistro.



Domanda: Se $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \neq 0$ allora $\exists$ asintoto obliquo destro?

Risposta: NO: $f(x) = (\log x) + x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}+1 \longrightarrow 1 \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\text{Però} \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

(b) Cercare max/min relativi e/o assoluti.

Abbiamo visto che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

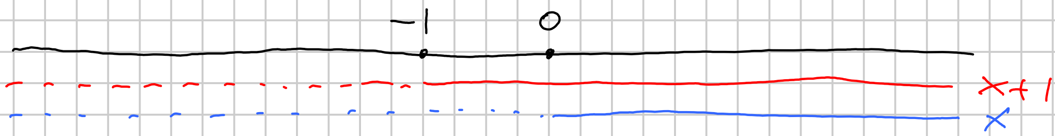
perciò NON esistono massimi né minimi ASSOLUTI.

Per cercare quelli relativi, studio intervalli di monotonia. Laddove definita, cioè per $x\neq 0$, f è derivabile. $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} \Longrightarrow$

$$f'(x) = 1\cdot e^{-\frac{1}{x}} + \cancel{x}\cdot\left(+\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Poiché $e^{-\frac{1}{x}}>0$ $\forall x\neq 0$, il segno di f' è uguale al segno di $\frac{x+1}{x}$.



Dunque $f'(x)>0$ per $x>0$ e $x<-1$

$f'(x)=0$ per $x=-1$

$f'(x)<0$ per $-1<x<0$.

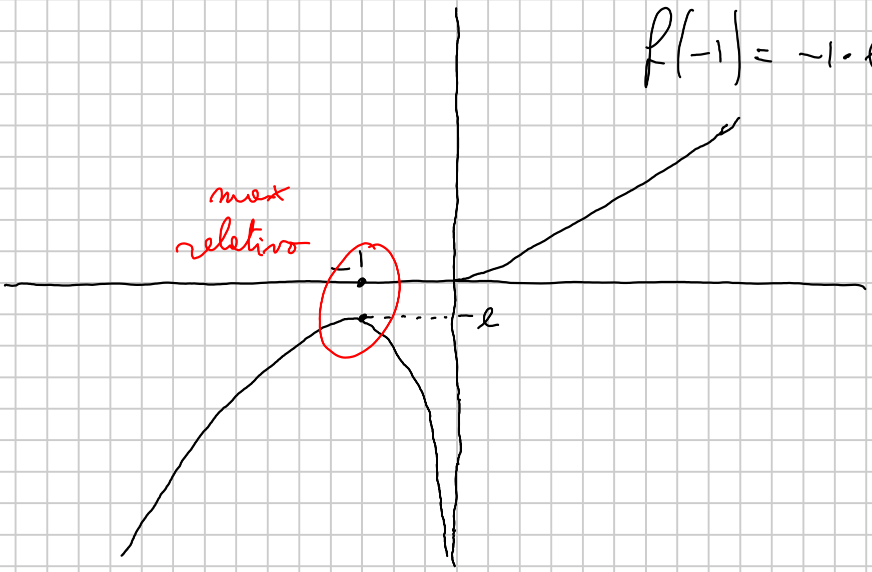
Perciò f è strettamente crescente su $(-\infty,-1)$, è strettamente decrescente su $(-1,0)$

è strettamente crescente in $(0,+\infty)$.

Questo è sufficiente per dire che -1 è l'unico punto di massimo relativo, e non esistono punti di minimo relativo.

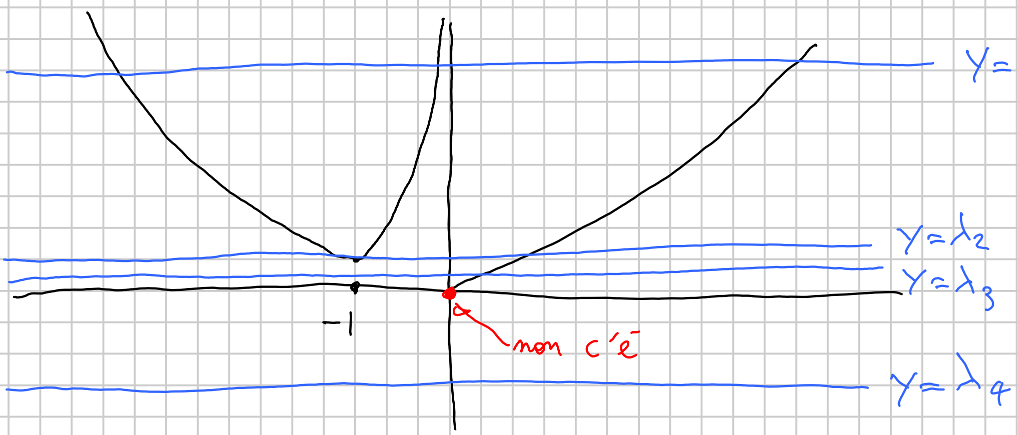
(Poiché il dominio è l'unione di due intervalli senza punti di bordo e f è derivabile in tutto il dominio, i punti di max/min relativo devono essere stazionari, per cui l'unico candidato è $x=-1$).

$$f(-1) = -1 \cdot e^{1} = -e$$



ⓒ Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante soluzioni ha $|x e^{-\frac{1}{x}}| = \lambda$?

Disegno il grafico di $y = |x e^{-\frac{1}{x}}|$.



Se $\lambda < 0$ $\quad |x e^{-\frac{1}{x}}| = \lambda$ non ha soluzioni

(ovvio perché il valore assoluto non è mai negativo).

Se $\lambda = 0$ $\quad |x e^{-\frac{1}{x}}| = \lambda$ non ha soluzioni

($e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$, e x si annulla solo in 0, ma in 0 $x e^{-\frac{1}{x}}$ non è definito).

Dunque $\lambda \leq 0 \implies$ no soluzioni

Soluzione: $0 < \lambda < e$: 1 soluzione

$\lambda = e$: 2 soluzioni

$\lambda > e$: 3 soluzioni

Tutto ciò è conseguenza del fatto che f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, per cui possiamo applicare i teoremi dei valori intermedi, insieme al fatto che strettamente monotona $\implies$ iniettiva.

Dimostriamo per bene, ad esempio, che se $\lambda > \frac{1}{e}$ ci sono 3 soluzioni.

Infatti, dallo studio della derivata, $x e^{-\frac{1}{x}}$ è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, per cui $|xe^{-\frac{1}{x}}|$ è strettamente decrescente in $(-\infty,-1)$

Dunque l'equazione $|xe^{-\frac{1}{x}}|=\lambda$ ha al massimo una soluzione in $(-\infty,-1)$. Inoltre,

$\lim_{x\to-\infty} |xe^{-\frac{1}{x}}|=+\infty$ e $|f(-1)|=e$, perciò per una variante del Teorema dei valori intermedi, se $e<\lambda<+\infty$, esiste almeno un $x\in(-\infty,-1)$ tale che $|f(x)|=|xe^{-\frac{1}{x}}|=\lambda$. Pertanto

$\exists!\ x\in(-\infty,-1)$ tale che $|xe^{-\frac{1}{x}}|=\lambda$.

In maniera analoga si mostra che $\exists!\ x\in(-1,0)$ con $|xe^{-\frac{1}{x}}|=\lambda$, e $\exists!\ x\in(0,+\infty)$ con $|xe^{-\frac{1}{x}}|=\lambda$.

In totale, se $\lambda>e$ ho 3 soluzioni, una in $(-\infty,-1)$, una in $(-1,0)$, una in $(0,+\infty)$.

DISUGUAGLIANZE CLASSICHE

① $\sin x\le x \iff x\ge 0$

Infatti, se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-\sin x$, allora $g'(x)=1-\cos x\ge 0$ e si annulla solo se $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Abbiamo già visto che perciò g è strettamente crescente (monotonia 3), per cui $g(x)\ge g(0)\iff x\ge 0$

cioè $g(x)\ge 0 \iff x\ge 0$

cioè $x \geq \sin x \iff x \geq 0$.

(2) Risolvere $\arctan x \leq x$.

Pongo $g(x) = x - \arctan x$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} =$
$= \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dunque g è crescente e $g(x) \geq g(0) \iff x \geq 0$.
Ma $g(0) = 0$, dunque $g(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, cioè
$x - \arctan x \geq 0 \iff x \geq 0$, che è la soluzione.

(3) Risolvere $e^{x-1} \geq x$.

Pongo $g(x) = e^{x-1} - x$, e ho $g'(x) = e^{x-1} - 1$.
Dunque $g'(x) \geq 0 \iff e^{x-1} \geq 1 \iff x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$.

Perciò g è decrescente in $(-\infty, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$. Dunque g ha minimo assoluto in 1, cioè $g(x) \geq g(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Ma $g(1) = e^{1-1} - 1 = e^0 - 1 = 0$, per cui $g(x) \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ cioè $e^{x-1} - x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, cioè
$e^{x-1} \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluzione alternativa: Posto $y = x-1$, abbiamo $x = 1+y$
e $e^{x-1} \geq x \iff e^y \geq 1+y$
Per lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange, abbiamo che $\forall y \in \mathbb{R}$

$$e^y = \underbrace{1 + y + \frac{e^c}{2} y^2}_{}$$ ≥ 0 sempre

(qui $f(y) = e^y$, per cui $f''(c) = e^c$)

$$f(y) = f(0) + f'(0)y + \frac{f''(c)y^2}{2!}, \text{ dove } c \text{ sta tra } 0 \text{ e } y$$

Dunque $e^y - (1+y) = \frac{e^c}{2} y^2 \geq 0 \quad \forall y$, per cui

$e^y \geq 1+y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ e $e^{x-1} \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio su studio di funzione.

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(e^x + x^2)$. Si mostri che f ha un unico punto di minimo assoluto x_0, con $x_0 < 0$ e $f(x_0) < 0$.

Soluzione: $f'(x) = \dfrac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$, il cui segno è uguale al segno del numeratore $g(x) = e^x + 2x$.

Problema: Non si sa risolvere algebricamente la disequazione $e^x + 2x > 0$ (nemmeno l'equazione $e^x + 2x = 0$).

Studio $g(x)$. $g'(x) = e^x + 2$, che è sempre positiva. Dunque g è strettamente crescente, per cui si annulla al massimo una volta. Inoltre,

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = e^{-\infty} + 2(-\infty) = 0 - \infty = -\infty$$

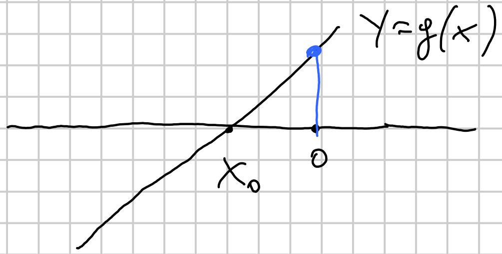
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = e^{+\infty} + 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Poiché g è continua, per il Teorema dei valori intermedi, $\exists x_0$ con $g(x_0) = 0$ (ed è unico per quanto sopra, cioè perché g è strettamente crescente). Perciò $\exists x_0$ tale che

$g(x) < 0$ per $x < x_0$, $g(x_0) = 0$, $g(x) > 0$ $x > x_0$.

Devo dimostrare che $x_0 < 0$. Ma $g(0) = e^0 + 2\cdot 0 > 0$

per cui da $g(0) > 0$ deduco che $x_0 < 0$.



Ricordando che il segno di g è il segno di f', concludiamo che f è strettamente decrescente su $(-\infty, x_0)$ e strettamente crescente su $(x_0, +\infty)$, per cui x_0 è l'unico punto di minimo assoluto.

Infine, notiamo che $f(0) = \log(e^0 + 0^2) = 0$, per cui $f(x_0) < f(0) = 0$ (in quanto x_0 è l'unico punto di minimo assoluto, per cui $f(x_0) < f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, in particolare $f(x_0) < f(0)$).

Determinare gli asintoti di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \log(e^x + x^2)$.

Svolgimento: Poiché f è continua, non ci sono asintoti verticali.

$$\lim_{x \to +\infty} \log(e^x + x^2) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log(e^x + x^2) = \log(e^{-\infty} + \infty^2) = \log(0 + \infty) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ NO asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+x^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x(1+x^2e^{-x}))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x+\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\log\left(1+\overset{\to 0}{\frac{x^2}{e^x}}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{x}\right)=1+0=1$$

Posto $m=1$, calcolo $\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\left(\log(e^x+x^2)-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{\log e^x}+\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)\cancel{-x}\right)=\log(1+0)=0.$$

Dunque c'è l'asintoto obliquo destro di equazione $y=x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(e^x+x^2)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log\left(x^2\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log x^2+\log\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\overset{\to 0}{\frac{2\log|x|}{x}}+\frac{\log\left(1+\overset{\to 0}{\frac{e^x}{x^2}}\right)}{x}=$$

$=0$

Perciò NON esiste asintoto obliquo sinistro.

Altri esercizi.

① Si determini $\max\{\sqrt[n]{n},\ n\geq 1\}=$

$$=\max\{\sqrt[1]{1},\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[5]{5},\sqrt[6]{6},\dots\}$$

$\sqrt[1]{1}=1$, $\sqrt[2]{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}=?$, $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{5}=?$ ...

$\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}$, per cui studio $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\log x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\log x}{x}}.$$

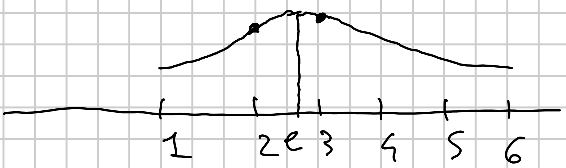
$$f'(x) = \left(\frac{\log x}{x}\right)' \cdot e^{\frac{\log x}{x}} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\log x)\cdot 1}{x^2} \cdot e^{\frac{\log x}{x}} =$$

$$= \frac{1-\log x}{\underbrace{x^2}_{>0}} \cdot \underbrace{e^{\frac{\log x}{x}}}_{>0}$$, il cui segno è uguale

al segno di $1-\log x$, che è >0 se $\log x < 1$, cioè $x<e$, e <0 se $x>e$. Dunque f è strettamente crescente in $(0,e)$ e strettamente decrescente in $(e,+\infty)$. Poiché $2<e<3$, questo mi dice che $\sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2}$ (perché $1^1 < 2^{\frac{1}{2}}$ in quanto f cresce in $(0,2)$)

e che $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$ $\forall n > 3$ (in quanto $3^{\frac{1}{3}} > n^{\frac{1}{n}}$ per $n>3$ perché f decresce in $(3,+\infty)$).

Dunque il max cercato è $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{3}$



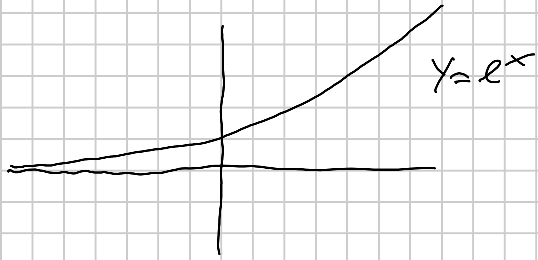
$$\left(\sqrt{2}\right)^6 = 2^3 = 8 \qquad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$$, per cui

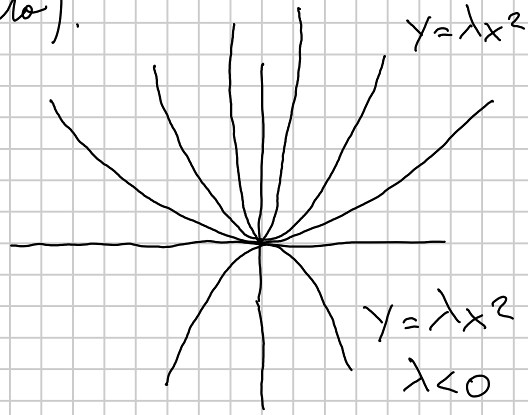
$\left(\sqrt{2}\right)^6 < \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ e $\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3}$. Dunque il max richiesto è $\sqrt[3]{3}$.

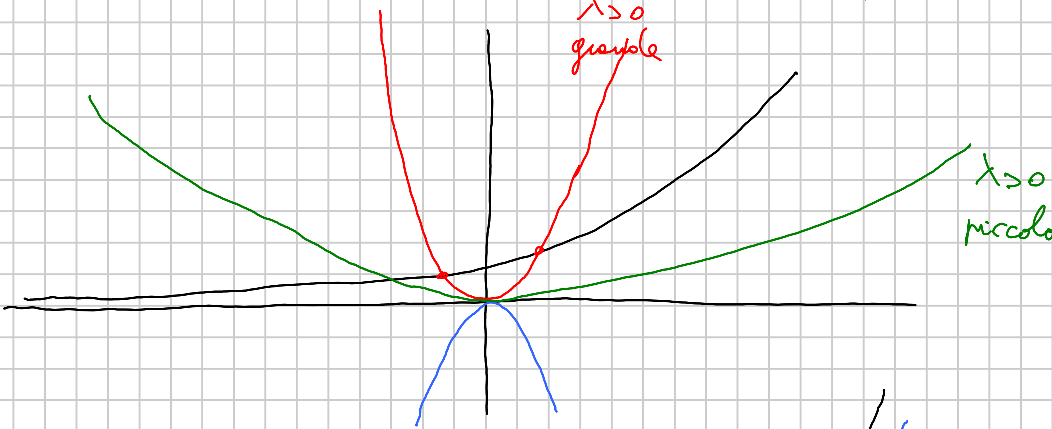
② Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, in quanti punti si intersecano le curve $y = e^x$ e $y = \lambda x^2$?

Si determini λ in modo che le due curve siano tangenti.

(cioè abbiano un punto del grafico in comune, e stessa retta tangente in quel punto).







Se $x=0$, $\quad e^x=1 \quad \lambda x^2=0$, per cui le curve non si incontrano in punti con ascissa 0.

x è l'ascissa di un punto di intersezione se e solo se $\quad e^x=\lambda x^2$. Potendo supporre $x\neq 0$ ciò equivale a $\dfrac{e^x}{x^2}=\lambda$. Posso riformulare la domanda chiedendo quante sono le soluzioni di $f(x)=\lambda$, dove $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

Uso come prima studio della monotonia e Teorema dei valori intermedi, visto che f è continua laddove è definita.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{exp batte potenza})$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0$$

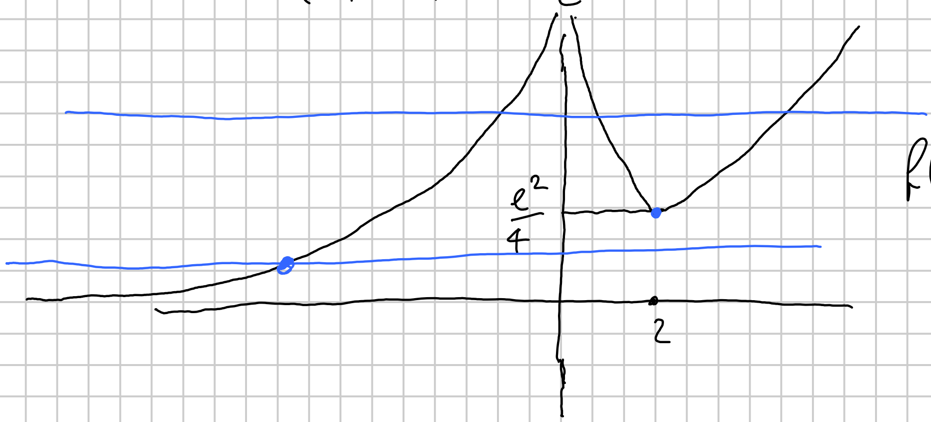
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty = \lim_{x\to0^-} f(x)$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot (2x)}{(x^2)^2} = \frac{x e^x (x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3},$$

il cui segno è uguale a quello di $\frac{x-2}{x^3}$. Dunque

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} >0 & \text{se } x>2 \text{ e } x<0 \\ =0 & \text{se } x=2 \\ <0 & \text{se } 0<x<2 \end{cases}$$

Dunque f è crescente su $(-\infty, 0)$, decrescente su $(0,2)$, crescente su $(2,+\infty)$ [tutto STRETTAMENTE]



$$f(2) = \frac{e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Dunque: Se $\lambda \leq 0$: 0 soluzioni

$0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$: 1 soluzione (con ascissa negativa)

$\lambda = \frac{e^2}{4}$: 2 soluzioni

$\lambda > \frac{e^2}{4}$: 3 soluzioni

Mi aspetto che le due curve siano tangenti quando $\lambda = \frac{e^2}{4}$, nel punto di ascissa 2.

Controlliamolo: $g(x) = e^x$, $h(x) = \frac{e^2}{4} x^2$

$g(2) = e^2$, $h(2) = \frac{e^2}{4} \cdot (2)^2 = e^2$, dunque le due curve si intersecano in $(2, e^2)$. Per vedere che sono tangenti basta che si abbia $g'(2) = h'(2)$.

$g'(x) = e^x \Rightarrow g'(2) = e^2$

$h'(x) = \frac{e^2}{4} \cdot 2x \Rightarrow h'(2) = \frac{e^2}{4} \cdot 2 \cdot 2 = e^2$. OK