November 9, 2019

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$: NOZIONI E PROPRIETÀ "TOPOLOGICHE"

Le affermazioni nel testo che segue, se non dimostrate, possono essere utilmente verificate per esercizio.

Intervalli. Si tratta dei sottoinsiemi I di $\mathbb{R}$ non vuoti e che verificano la seguente proprietà:

Se $a, b \in I$, $a \leq b$ allora $\{x \in \mathbb{R}|\ a \leq x \leq b\} \subseteq I$.

Possiamo classificare gli intervalli rispetto ad altre proprietà.

Intervalli limitati. Ricordiamo che, in generale, un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è limitato se è superiormente e inferiormente limitato, quindi esistono in $\mathbb{R}$ i suoi estremi superiore e inferiore. Dato un intervallo limitato I, poniamo $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$. Si hanno allora i seguenti sottocasi:

1) $a, b \in I$, in tal caso $I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ e viene detto intervallo limitato e *chiuso*. Questo include il caso "degenere" in cui $I = \{a\}$ consiste di un solo punto.

2) Entrambi a e b non appartengono a I, allora $I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ e viene detto intervallo limitato e *aperto*.

3) Uno solo tra a e b appartiene ad I; per cui $I = [a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$ oppure $I = (a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$. Questi vengono detti intervalli limitati e *semi-aperti* (o anche *semi-chiusi*).

Intervalli non limitati. Se I non è limitato, allora non è superiormente limitato o non è inferiormente limitato. Se è inferiormente limitato ma non superiormente limitato, allora $I = (a, +\infty) := \{x > a\}$ (semiretta *aperta*), oppure $I = [a, +\infty) := \{x \geq a\}$ (semiretta *chiusa*). Se è superiormente limitato ma non inferiormente limitato, allora $I = (-\infty, b) := \{x < b\}$ (semiretta *aperta*), oppure $I = (-\infty, b] := \{x \leq b\}$ (semiretta *chiusa*). Se non è entrambe le cose, allora $I = (-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$ cioè è tutto $\mathbb{R}$, anche in questo caso è un intervallo aperto.

Sistema di intorni di un punto. Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, per ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, indicheremo con $I(x_0, \epsilon)$ l'intervallo aperto di centro in x_0 e raggio ϵ definito:

$$I(x_0, \epsilon) := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}|\ x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\}$$

oppure equivalentemente:

$$I(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}|\ |x - x_0| < \epsilon\}\ .$$

$I(x_0, \epsilon)$ è detto *lo ϵ-intorno aperto di x_0*. Al variare di $\epsilon > 0$, gli $I(x_0, \epsilon)$ formano il *sistema di intorni di x_0 in $\mathbb{R}$*. Quando diremo che U è un intorno di x_0, intenderemo che $U = I(x_0, \epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$. Si osserva che:

- Se $\epsilon' < \epsilon$ allora $I(x_0, \epsilon') \subseteq I(x_0, \epsilon)$, in effetti è strettamente contenuto.
- Se $x_2 \in I(x_0, \epsilon_0) \cap I(x_1, \epsilon_1)$ allora esiste $\epsilon_2 > 0$ tale che
$$I(x_2, \epsilon_2) \subseteq I(x_0, \epsilon_0) \cap I(x_1, \epsilon_1)\ .$$
- Per ogni $I(x_0, \epsilon)$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tale che $1/n < \epsilon$ e quindi $I(x_0, 1/n) \subseteq I(x_0, \epsilon)$.
- Se $x_0 \neq x_1$, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \cap I(x_1, \epsilon) = \emptyset$ (basta prendere per esempio $\epsilon = |x_0 - x_1|/3$).

Sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$. $X \subseteq \mathbb{R}$ è un *sottoinsieme aperto* di $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in X$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \subseteq X$. Per esempio:

- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto perché la proprietà da verificare è vuota ($\emptyset$ non ha elementi).
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto. Più in generale un intervallo (limitato o illimitato) "aperto" secondo la terminologia relativa agli intervalli introdotta in precedenza, è anche un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ secondo la definizione generale.
- Un intervallo chiuso (limitato o illimitato) oppure un intervallo limitato e semichiuso non è un sottoinsieme aperto.

Si osserva che:

Se A e B sono aperti di $\mathbb{R}$, allora anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Più in generale, una unione *arbitraria* di aperti è un aperto e una intersezione *finita* di aperti è un aperto. Invece una intersezione arbitraria di aperti può non essere un aperto; si consideri per esempio $\bigcap_{\epsilon} I(x_0, \epsilon) = \{x_0\}$.

Parte interna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dati $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 è *un punto interno* di X se esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \subseteq X$. La *parte interna di* X (indicata con $\mathrm{Int}(X) \subseteq X$) consiste dei punti interni di X. Dunque $X \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto di $\mathbb{R}$ se e solo se coincide con la sua parte interna ($X = \mathrm{Int}(X)$). Per esempio:

- Se $I = [a, b]$, $a < b$ è un intervallo chiuso e limitato, allora la sua parte interna coincide con l'intervallo aperto (a, b).
- La parte interna di $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è vuota.
- La parte interna di $\mathbb{Q}$ è vuota. Infatti per ogni $q \in \mathbb{Q}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $q_n = q + \sqrt{2}/n$ non è razionale e per ogni $\epsilon > 0$, esiste n abbastanza grande tale che $q_n \in I(q, \epsilon)$.

Punti di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (*non* stiamo richiedendo che $x_0 \in X$). Si dice che x_0 *è un punto di accumulazione per* X se per ogni $\epsilon > 0$,

$$(I(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset \ .$$

Si osserva che:

- Se nella definizione non avessimo eliminato x_0 dagli intervalli $I(x_0, \epsilon)$, allora ogni $x_0 \in X$ sarebbe stato di accumulazione per X. Invece con la definizione che abbiamo adottato, per esempio, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ non ha alcun punto di accumulazione in $\mathbb{R}$.
- Se X è un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$, allora ogni $x_0 \in X$ è di accumulazione per X. Infatti si consideri un arbitrario $I(x_0, \epsilon)$. Poiché X è aperto esiste $\epsilon' > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon') \subseteq X$. Poniamo $\epsilon" = \min(\epsilon, \epsilon')$. Allora $I(x_0, \epsilon") \setminus \{x_0\}$ è non vuoto e tutto contenuto in X.
- Se $I = (a, b)$ è un intervallo limitato aperto, allora a e b non appartengono ad I e sono entrambi punti di accumulazione per I.
- Nelle solite ipotesi, x_0 è di accumulazione per X se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

  $$(I(x_0, 1/n) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset \ .$$

  Un' implicazione è evidente perché gli $I(x_0, 1/n)$ sono particolari intorni di x_0 e la definizione di punto di accumulazione riguarda *tutti* gli ϵ-intorni di x_0. Viceversa, sia $I(x_0, \epsilon)$ un arbitrario ϵ-intorno di x_0. Sappiamo che esiste $n > 0$ tale che $I(x_0, 1/n) \subseteq I(x_0, \epsilon)$. Per ipotesi

  $$(I(x_0, 1/n) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$$

  e dunque la stessa cosa vale anche per $I(x_0, \epsilon)$.

Un elemento x_0 di X che non è di accumulazione per X è detto un *punto isolato di* X: esiste $I(x_0, \epsilon)$ tale che $I(x_0, \epsilon) \cap X = \{x_0\}$.

Chiusura e frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, la sua *chiusura* $\overline{X}$ è data dall'unione di X con i suoi punti di accumulazione. Chiaramente $X \subset \overline{X}$. Diciamo che X è *chiuso* se $X = \overline{X}$. Per esempio:

- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme chiuso perché la proprietà da verificare è vuota ($\emptyset$ non ha elementi).
- $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme chiuso.
- Un intervallo (limitato o illimitato) "chiuso " secondo la terminologia relativa agli intervalli introdotta in precedenza, è anche un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ secondo la definizione generale.
- Un intervallo limitato e semichiuso non è un sottoinsieme chiuso.
- Si osserva che $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono contemporaneamente aperti e chiusi, mentre ogni intervallo limitato e semiaperto non è aperto e non è chiuso; quindi "aperto" non è la negazione di "chiuso".
- $\overline{N} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

La chiusura $\overline{X}$ può essere descritta equivalentemente nel modo sequente: $\overline{X}$ è l'unione di $\mathrm{Int}(X)$ con l'insieme dei punti isolati di X e con l'insieme dei punti di accumulazione di X che non sono punti interni di X.
Vale:

- X è aperto se e solo se il complementare X^C è chiuso.
- Una unione *finita* di chiusi è un chiuso e una intersezione *arbitraria* di chiusi e' un chiuso. Invece una unione arbitraria di chiusi può non essere un chiuso; si consideri per esempio $X = \{1/n;\ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$. È fatto di punti isolati, quindi è unione di chiusi, ma $\overline{X} = X \cup \{0\}$.

La *frontiera* di $X \subseteq \mathbb{R}$ è per definizione

$$\mathcal{F}(X) := \overline{X} \setminus \mathrm{Int}(X) \ .$$

Per esempio:

- $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N})$.
- Se $I = (a, b)$, $a < b$, allora $\overline{I} = [a, b]$, $\mathcal{F}(I) = \{a, b\}$.
- Se $X = \{1/n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, allora $\overline{X} = X \cup \{0\}$, $\mathcal{F}(X) = \overline{X}$.

Vale
$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X^C)$.

La retta estesa $\overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo l'insieme

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \ .$$

Cioè abbiamo formalmente aggiunto ad $\mathbb{R}$ due punti indicati con $\pm\infty$. Arricchiamo la costruzione attribuendo anche ai due punti aggiunti un rispettivo sistema di intorni. Per $+\infty$ consideriamo la famiglia di semirette aperte $(a, +\infty)$, dove a varia in $\mathbb{R}$. Analogamente, per $-\infty$ consideriamo la famiglia delle semirette aperte $(-\infty, a)$. Quando diremo che U è un intorno di $\pm\infty$, intenderemo che U è una di queste semirette aperte, secondo il caso. Possiamo estendere a $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordinamento “$\leq$” definito su $\mathbb{R}$, ponendo che per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < a < +\infty \ .$$

Possiamo estendere la nozione di punto di accumulazione di un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ ai punti $\pm\infty$: $\pm\infty$ è di accumulazione per X se per ogni intorno U di $\pm\infty$ si ha che $U \cap X \neq \emptyset$. In effetti $+\infty$ è di accumulazione per X se e solo se X non è superiormente limitato e in tal caso possiamo porre $\sup X = +\infty$. Analogamente se X non è inferiormente limitato possiamo porre $\inf X = -\infty$.