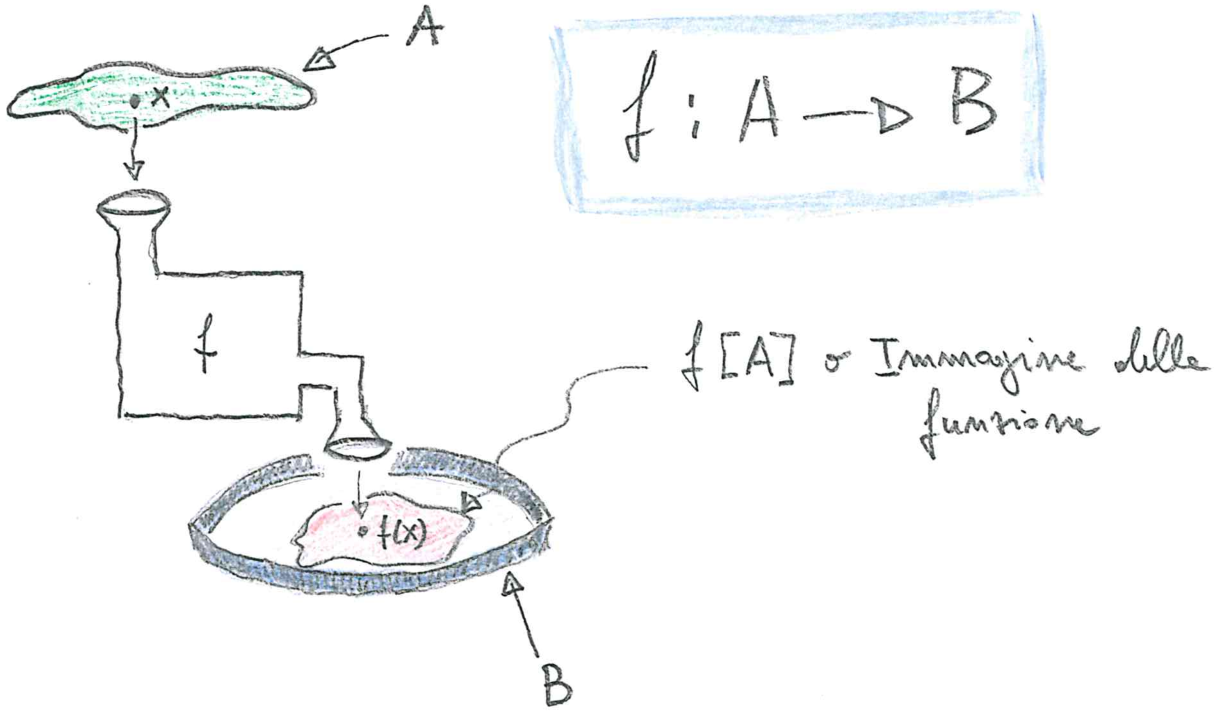
$$\boxed{f: A \to B}$$



Una funzione f da un insieme A ad un insieme B, in simboli $f: A \to B$, è una "legge" che ad ogni elemento $x \in A$ associa un unico elemento $f(x) \in B$.

- A si dice dominio di f
- B si dice codominio di f e descrive l'ambiente in cui vivono gli elementi $f(x)$ al variare di x in A (il "contenitore").
- L'immagine di f, in simboli $f[A]$, è l'insieme degli elementi di B che sono output di almeno un elemento di A. Se $f[A] = B$, la funzione si dice suriettiva.
- La funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva se non ci sono due elementi x_1 e x_2 di A (diversi) per cui $f(x_1) = f(x_2)$.

Numeri fattoriali, coefficienti binomiali con alcune semplici applicazioni per contare il numero di funzioni

La successione dei numeri fattoriali $0!, 1!, 2!, \dots$ è definita da
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)(n!) \end{cases}$$

Quindi $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120, \dots$

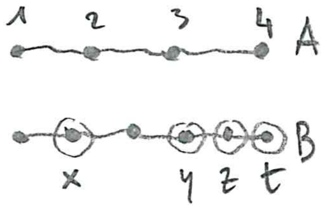
Il numero di permutazioni di n oggetti diversi è $n!$, ad esempio le permutazioni di $\{1,2,3\}$ sono $3! = 6$:
123, 132, 213, 231, 312, 321.

Con il simbolo $\binom{n}{k}$ indichiamo il numero
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
di possibili scelte di k oggetti tra n oggetti diversi. Ad esempio $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$, dove $(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$ sono le 6 possibili scelte di 2 elementi tra $\{1,2,3,4\}$

Vediamo 2 applicazioni:

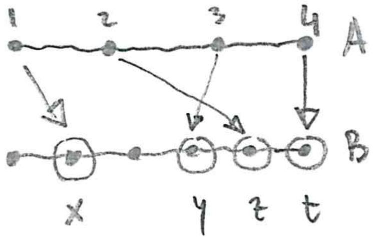
1) Se A e B sono 2 insiemi finiti con a e b elementi, rispettivamente, allora le funzioni iniettive da A in B sono esattamente $\binom{b}{a} \cdot a!$, se $b \geq a$.

Idea:



- scelgo a elementi tra quelli di B che riceveranno le immagini degli elementi di A. Ci sono $\binom{b}{a}$ scelte.

La permutazione (x, z, y, t) codifica la funzione



- una permutazione degli elementi scelti codifica una funzione iniettiva da A a B con immagine data dagli elementi scelti al passo precedente. Ci sono $a!$ permutazioni.

2) Se A e B sono 2 insiemi finiti con a e b elementi, rispettivamente, allora le funzioni suriettive da A in B si possono calcolare ricorsivamente come

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_b = b^a - \sum_{i=1}^{b-1} s_i \binom{b}{i} \end{cases}$$

, dove s_b indica il numero di funzioni suriettive da A in B e $a \geq b$.

Idea: b^a è il numero di funzioni da A in B a cui sottraiamo il numero $\sum_{i=1}^{b-1} s_i \binom{b}{i}$ di funzioni che non sono suriettive da A in B. In particolare,

$s_i \binom{b}{i}$ è il numero di funzioni da A in B che hanno per immagine un sottoinsieme di B composto da i elementi (ci sono $\binom{b}{i}$ scelte di tali elementi).

Per esercizio, calcoliamo:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 2^a - s_1 \binom{2}{1} = 2^a - 2$$

$$s_3 = 3^a - s_1 \binom{3}{1} - s_2 \binom{3}{2} = 3^a - 3 - (2^a - 2) \cdot 3 =$$

$$= 3^a - 3 \cdot 2^a + 3$$

$$s_4 = 4^a - s_1 \binom{4}{1} - s_2 \binom{4}{2} - s_3 \binom{4}{3} = 4^a - 4 - (2^a - 2) \cdot 6$$

$$- (3^a - 3 \cdot 2^a + 3) \cdot 4 = 4^a - 4 \cdot 3^a + 6 \cdot 2^a - 4$$