LOGICA MATEMATICA
Corso 2022/2023

Mauro Di Nasso

N.B. Questi sono appunti dal corso di "Logica Matematica" – I semestre a.a. 2022/2023, ancora incompleti. Ogni suggerimento su eventuali correzioni/integrazioni è il benvenuto.

CAPITOLO 1

Calcolo Proposizionale

1. Introduzione ai connettivi

In questa parte preliminare preciseremo il significato dell'avverbio "non", delle congiunzioni "e" ed "o", delle espressioni del tipo "se ... allora" e "se e solo se".

Nel linguaggio comune di tutti i giorni – cioè nel cosiddetto *linguaggio naturale* – il loro significato non è univocamente stabilito. Ad esempio, a seconda del contesto, la particella "o" può assumere sia significato *congiuntivo* che *disgiuntivo.* Chiariamo un esempio. Quando chiediamo "un panino con prosciutto *o* con salame", la "o" assume significato *disgiuntivo.* Infatti, la nostra richiesta sarà soddisfatta se riceviamo un panino con prosciutto, sarà soddisfatta se riceviamo un panino con salame, ma certamente *non* sarà soddisfatta nel caso in cui ricevessimo un panino con prosciutto e salame insieme. Invece, quando un regolamento stabilisce che per partecipare ad un concorso occorre "essere laureati in matematica *o* in fisica", certamente può fare domanda anche chi sia in possesso di una doppia laurea in matematica ed in fisica (significato *congiuntivo*). Per riuscire a dare una trattazione matematica del ragionamento e della nozione di linguaggio, sarà necessario fare una scelta precisa, definendo senza ambiguità ed una volta per tutte il significato da attribuire alla congiunzione "o", così come alle altre espressioni considerate. Lo faremo seguendo il comune uso che ne viene fatto nel linguaggio matematico.

Come primo passo verso una formalizzazione del concetto di linguaggio, introduciamo i seguenti simboli, chiamati *connettivi logici*:

- Simbolo di *negazione* $\neg$ "non" ;
- Simbolo di *congiunzione* $\wedge$ "e" ;
- Simbolo di *disgiunzione* $\vee$ "o" ;
- Simbolo di *implicazione* $\rightarrow$ "se ... allora" ;
- Simbolo di *doppia implicazione* $\leftrightarrow$ "se e solo se".

I connettivi permettono di formare nuove proposizion a partire da proposizioni date. Ad esempio se P denota la proposizione "c'è il sole" e Q la proposizione "vado al mare", $\neg P$ denoterà la proposizione "*non* c'è il sole", $P \to Q$ la proposizione "*se* c'è il sole *allora* vado al mare", e così via. Il simbolo di negazione $\neg$ è un connettivo *unario* perché si applica ad una singola proposizione, mentre gli altri connettivi si dicono *binari* perché connettono coppie di proposizioni.

Qui per *proposizione* intendiamo un qualunque enunciato cui sia attribuito – in un fissato contesto – uno ed uno solo tra i due *valori di verità*: vero oppure falso. Naturalmente, questa è una semplificazione rispetto al linguaggio naturale, in cui si hanno spesso enunciati il cui valore di verità appare più sfumato e non riducibile a due sole possibilità. Tuttavia, nel comune uso matematico, ogni proprietà "ben formulata" viene effettivamente pensata come *proposizione* nel senso indicato sopra, cioè come enunciato che è o vero o falso.

Il grande logico matematico (e filosofo) Bertrand Russell scrisse che in matematica non conosciamo mai ciò di cui stiamo parlando.[1] In effetti, più che l'essenza degli oggetti presentati, ciò che compete al matematico è capire come funzionano (tipico esempio: i numeri). Anche qui faremo qualcosa di simile. Allo scopo di attribuire un significato preciso ai vari connettivi, stabiliamo come si comportano rispetto ai valori di verità delle proposizioni coinvolte. Precisamente, per tutte le proposizioni P e Q, richiediamo quanto segue.

- $\neg P$ è vera quando P è falsa, ed è falsa quando P è vera;
- $P \wedge Q$ è vera quando sia P che Q sono vere, ed è falsa altrimenti;
- $P \vee Q$ è falsa quando sia P che Q sono false, ed è vera altrimenti;
- $P \to Q$ è falsa quando l'*ipotesi* (o *antecedente*) P è vera e la *tesi* (o *conseguente*) Q è falsa, ed è vera negli altri casi;
- $P \leftrightarrow Q$ è vera quando P e Q hanno lo stesso valore di verità, ed è falsa altrimenti.

Tutte queste richieste sono schematizzate nella tabella qua sotto, dove è indicato il valore di verità **V** (vero) o **F** (falso) che intendiamo attribuire alle proposizioni formate usando i vari connettivi, in funzione dei possibili valori di verità delle proposizioni di partenza.

[1] *"Mathematics may be defined as the subject where we never know what we are talking about"* (dal libro: Recent Work on the Principles of Mathematics).

P	$\neg P$
V	**F**
F	**V**

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Per giungere a definizioni precise abbiamo dovuto necessariamente compiere delle scelte, non sempre corrispondenti al significato che i vari connettivi hanno nel linguaggio naturale. Ad esempio, la disgiunzione $\vee$ corrisponde alla "o" nel suo significato *inclusivo*: richiediamo infatti che la proposizione $P \vee Q$ sia vera nel caso in cui P e Q siano entrambe vere. È interessante il fatto che questa ambiguità di significato che la disgiunzione ha in italiano, non sussisteva invece nel latino. In quella lingua si usavano infatti due particelle diverse: "*vel*" per denotare la "o" *inclusiva* (quella corrispondente al nostro connettivo $\vee$), e "*aut*" per la disgiunzione *esclusiva* (come nell'esempio del "panino al prosciutto o al salame").

Un caso particolarmente delicato è quello dell'*implicazione* $P \to Q$. Pensare alla proposizione $P \to Q$ come vera quando P e Q sono vere, e come falsa quando P è vera ma Q è falsa, sembra in accordo con l'uso comune. Infatti, con un ragionamento corretto, da premesse vere si ottengono soltanto conseguenze vere.[2] Un po' strano sembra invece accettare come valida l'implicazione $P \to Q$ ogni volta che P è falsa. Questo è però in accordo con la pratica matematica.

Un esempio tipico è dato dalla fondamentale nozione di sottoinsieme. Per definizione, un insieme A è *sottoinsieme* di un insieme B se la seguente implicazione è vera per ogni x:

$$(x \in A) \longrightarrow (x \in B).$$

Nel caso in cui l'elemento scelto x appartenga ad A, cioè quando "$x \in A$" è vera, richiediamo che anche "$x \in B$" sia vera. Se invece l'elemento x *non* appartiene ad A, l'implicazione di sopra è considerata comunque vera, sia nel caso che "$x \in B$" sia vera, sia nel caso che "$x \notin B$" sia falsa.

Un altro possibile argomento a favore della tavola di verità che abbiamo dato per il connettivo $\to$, è il seguente. Indipendentemente dal

[2] In realtà, nel linguaggio naturale, si considerano implicazioni $P \to Q$ solo nell'eventualità che possa esistere un preciso rapporto causale tra P e Q. Ad esempio, comunemente non si attribuisce alcun valore di verità ad implicazioni del tipo: "se i multipli di 12 sono pari allora Pisa è in Toscana".

valore di verità di P e di Q, sembra ragionevole accettare come vera l'implicazione $(P \wedge Q) \rightarrow P$. Infatti, sembra corretto che la congiunzione di due ipotesi implichi ognuna della due. Osserviamo che se P è vera e Q è falsa, abbiamo la validità di "$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$"; mentre se P è falso, abbiamo la validità di "$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$".

2. Le formule proposizionali

Dopo questa introduzione un po' euristica sul significato dei connettivi logici, spostiamoci ora su un livello più formale, introducendo il cosiddetto *calcolo proposizionale*. Lo scopo è quello di matematizzare l'uso delle proposizioni e dei connettivi, così da poter trattare quelle nozioni logiche mediante un vero e proprio calcolo. Naturalmente, il passo iniziale è quello di dare definizioni matematiche, cioè precise e rigorose.

DEFINIZIONE 1.1. Un *linguaggio proposizionale* è un insieme infinito di simboli $\mathcal{L}$, chiamati *$\mathcal{L}$-variabili proposizionali.*

Seguendo l'uso comune, denotiamo con lettere latine maiuscole le variabili proposizionali, eventualmente con indici.

$$A, B, C, \ \ldots \ , X, Y, Z, \ \ldots \ , A_1, A_2, A_3, \ \ldots \ , X_1, X_2, X_3, \ \ldots$$

Intuitivamente, possiamo pensare alle variabili proposizionali come a generiche proposizioni primitive, a partire dalle quali si ottengono – usando i connettivi – tutte le altre proposizioni che stiamo studiando. Naturalmente, devono essere stabilite regole precise per la formazione di nuove proposizioni a partire da proposizioni date.

DEFINIZIONE 1.2. L'insieme Form($\mathcal{L}$) delle *$\mathcal{L}$-formule proposizionali* è il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti proprietà:

(1) Le $\mathcal{L}$-variabili proposizionali sono $\mathcal{L}$-formule proposizionali, dette $\mathcal{L}$-formule *atomiche*;
(2) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono $\mathcal{L}$-formule proposizionali, allora anche
$$(\neg\mathcal{A}), \quad (\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}), \quad (\mathcal{A}\vee\mathcal{B}), \quad (\mathcal{A}\to\mathcal{B}), \quad (\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$$
sono $\mathcal{L}$-formule proposizionali.

Questa definizione ha bisogno di una giustificazione, perché dobbiamo garantire che effettivamente esiste *il più piccolo* tra gli insiemi che soddisfano le proprietà (1) e (2) di sopra. A questo scopo, definiamo la sequenza di insiemi $\langle\, \mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\,\rangle$ per ricorsione, ponendo:

- $\mathcal{F}_0 \ = \ \mathcal{L}$;
- $$\begin{aligned}\mathcal{F}_{n+1} \ = \ \mathcal{F}_n & \bigcup \{(\neg\mathcal{A}) \mid \mathcal{A}\in\mathcal{F}_n\} \bigcup \{(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \mid \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{F}_n\} \\ & \bigcup \{(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \mid \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{F}_n\} \bigcup \{(\mathcal{A}\to\mathcal{B}) \mid \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{F}_n\} \\ & \bigcup \{(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B}) \mid \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{F}_n(\mathcal{L})\}.\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 1.3. *L'insieme di tutte le $\mathcal{L}$-formule proposizionali è dato dall'unione*
$$\mathit{Form}(\mathcal{L}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n.$$

Dim. Vediamo intanto che l'unione $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ soddisfa le proprietà (1) e (2) della Definizione 1.2. Banalmente $\mathcal{L} = \mathcal{F}_0 \subseteq \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Supponiamo ora che $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$, cioè che $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{n_1}$ e $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_{n_2}$ per opportuni n_1, n_2. Visto che la successione degli $\mathcal{F}_n$ è crescente, cioè $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n'}$ per $n \leq n'$, entrambe le formule $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_m$, dove $m = \max\{n_1, n_2\}$. Perciò $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, e $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ appartengono tutte a $\mathcal{F}_{m+1}$, e quindi a $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Resta da vedere che qualunque altro insieme Λ che soddisfi le proprietà (1) e (2) della Definizione 1.2 include necessariamente tutti gli insiemi $\mathcal{F}_n$, cioè che $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ è *il più piccolo* insieme con quelle proprietà. Questo è immediato per induzione su n. Infatti, per la (1), $\mathcal{F}_0 = \mathcal{L} \subseteq \Lambda$. Inoltre, per la (2), se $\mathcal{F}_n \subseteq \Lambda$, anche $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \Lambda$. □

Le formule proposizionali sono dunque particolari *stringhe finite* di variabili proposizionali, connettivi, e parentesi. L'uso delle parentesi è necessario per evitare ambiguità. Ad esempio, la scrittura "$\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$" avrebbe due possibili interpretazioni: la prima consiste nel negare $\mathcal{A}$ e poi nel congiungere con $\mathcal{B}$, cioè "$((\neg\mathcal{A}) \wedge \mathcal{B})$"; la seconda consiste nel negare la congiunzione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, cioè "$(\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$". Tuttavia, per comodità, alcune delle parentesi verranno omesse nella scrittura delle formule, quando ciò non provochi confusione. Lo faremo attenendoci alle seguenti convenzioni nella lettura di una stringa:

- *Il connettivo $\neg$ ha la precedenza su $\wedge$ e $\vee$, i quali, a loro volta, hanno la precedenza su $\to$ e $\leftrightarrow$.*

Ad esempio, scriviamo "$\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \to \mathcal{C}$" per intendere la formula "$(((\neg\mathcal{A}) \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$".

Sull'insieme Form($\mathcal{L}$) vale una particolare forma di induzione, detta *induzione sulla costruzione delle formule* che useremo ripetutamente durante il corso.

Proposizione 1.4. *Sia Φ una proprietà, e supponiamo che valgano:*

- Base di induzione*: Φ vale per tutte le formule atomiche;*
- Passo induttivo*: Se Φ vale per le formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, allora Φ vale anche per le formule $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, e $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$.*

Allora la proprietà Φ vale per tutte le $\mathcal{L}$-formule.

Dim. Procedendo per induzione su n e usando le ipotesi di sopra, è immediato dimostrare che la proprietà Φ vale per tutte le formule in $\mathcal{F}_n$. La tesi segue allora dal fatto che Form($\mathcal{L}$) $= \bigcup_n \mathcal{F}_n$. □

Oltre a dimostrare proprietà per induzione sulle formule, si possono anche dare *definizioni* per induzione sulle formule.[3] Un primo esempio è la seguente nozione di sottoformula.

Definizione 1.5. Definiamo per induzione sulla costruzione delle formule l'insieme $\mathrm{SF}(\mathcal{A})$ delle *sottoformule* di una formula $\mathcal{A}$ in questo modo:

- Se $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ è una formula atomica, allora $\mathrm{SF}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\}$, cioè $\mathcal{A}$ è l'unica sottoformula di se stessa.
- Se $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$ allora $\mathrm{SF}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup \mathrm{SF}(\mathcal{B})$;
- Se $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ o se $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ o se $\mathcal{A} = \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ o se $\mathcal{A} = \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$, allora $\mathrm{SF}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup \mathrm{SF}(\mathcal{B}) \cup \mathrm{SF}(\mathcal{C})$.

Definizione 1.6. Definiamo per induzione sulla costruzione delle formule il *rango* o *lunghezza* $\rho(\mathcal{A})$ di una formula $\mathcal{A}$ come segue:

$$\rho(\mathcal{A}) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{A} \text{ è una variabile}\,; \\ \rho(\mathcal{B}) + 1 & \text{se } \mathcal{A} = \neg\mathcal{B}\,; \\ \max\{\rho(\mathcal{B}), \rho(\mathcal{C})\} + 1 & \text{se } \mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\,, \text{o se } \mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\,, \\ & \text{o se } \mathcal{A} = \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}\,, \text{o se } \mathcal{A} = \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}\,. \end{cases}$$

Procedere per induzione sulla costruzione delle formule equivale a procedere per induzione sul rango (o lunghezza). Vale infatti la seguente proprietà, la cui facile dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esercizio 1.7. Per ogni formula $\mathcal{A}$, dimostrare che

$$\rho(\mathcal{A}) \;=\; \min\{n \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Notiamo che il rango di una formula è *diverso* dal numero dei connettivi che vi compaiono.

Esercizio 1.8. Sia $\mathcal{A}$ è una formula di rango n. Dimostrare che se k è il numero di connettivi che compaiono in $\mathcal{A}$ allora $n \leq k \leq 2^n - 1$.

È importante chiarire che le formule proposizionali sono oggetti puramente *sintattici*. Sono infatti semplici stringhe finite di simboli, e quindi non hanno di per sé alcun valore di verità.

Le formule possono essere pensate come strutture di proposizioni, nel senso che rimpiazzando le variabili con proposizioni arbitrarie, ne risultano nuove proposizioni. Ad esempio, se nella formula "$A \rightarrow B \vee C$" sostituiamo la variabile A con la proposizione "c'è il sole", la variabile

[3] In realtà in questo caso sarebbe più corretto parlare di definizioni per *ricorsione*.

B con la proposizione "vado al mare" e infine C con "vado a fare shopping", otteniamo la proposizione "se c'è il sole, allora vado al mare o vado a fare shopping".

3. Le interpretazioni

Dopo i primi aspetti *sintattici* della logica proposizionale, occupiamoci ora della *semantica*, cioè del possibile significato delle formule. Da questo punto di vista, la forza espressiva della logica proposizionale appare limitata, perché la semantica si riduce ad un'attribuzione dei valori di verità **F** o **V**.

DEFINIZIONE 1.9. Si dice $\mathcal{L}$-*interpretazione* l'attribuzione di un valore di verità a ciascuna $\mathcal{L}$-formula che sia coerente con le tavole di verità dei connettivi; dunque una $\mathcal{L}$-interpretazione è una funzione $I : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ tale che

$$I(\neg\mathcal{A}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } I(\mathcal{A}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{F} & \text{se } I(\mathcal{A}) = \mathbf{V}. \end{cases}$$

$$I(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B}) = \mathbf{V}\,; \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$I(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{V} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$I(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } I(\mathcal{A}) = \mathbf{V} \text{ e } I(\mathcal{B}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{V} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$I(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B})\,; \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le interpretazioni sono univocamente determinate dai valori di verità che assegnano alle variabili.

DEFINIZIONE 1.10. Si dice $\mathcal{L}$-*assegnamento* l'attribuzione di un valore di verità a ciascuna variabile in $\mathcal{L}$; dunque, un $\mathcal{L}$-assegnamento è una funzione $\alpha : \mathcal{L} \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$.

È facile verificare che ogni assegnamento $\alpha : \mathcal{L} \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ si estende in modo unico ad un'interpretazione

$$\widehat{\alpha} : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}.$$

Infatti, per definire $\widehat{\alpha}$ si procede per *induzione* sulla lunghezza n delle formule. Quando $n = 0$, cioè per le variabili proposizionali $A \in \mathcal{L}$, poniamo $\widehat{\alpha}(A) = \alpha(A)$. Al passo induttivo, poniamo:

$$\widehat{\alpha}(\neg\mathcal{A}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{F} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}. \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \widehat{\alpha}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}\,; \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \widehat{\alpha}(\mathcal{B}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{V} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \mathbf{V} \text{ e } \widehat{\alpha}(\mathcal{B}) = \mathbf{F}\,; \\ \mathbf{V} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } \widehat{\alpha}(\mathcal{A}) = \widehat{\alpha}(\mathcal{B})\,; \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque, data un'interpretazione $I : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$, se denotiamo con $\alpha = I|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ l'assegnamento ottenuto restringendo I ad $\mathcal{L}$, deve essere $\widehat{\alpha} = I$. Per questo, le due nozioni di assegnamento e di interpretazione sono essenzialmente equivalenti.

Definizione 1.11. Una $\mathcal{L}$-formula proposizionale $\mathcal{A}$ si dice *vera* nell'interpretazione I se $I(\mathcal{A}) = \mathbf{V}$, e si dice *falsa* nell'interpretazione I se $I(\mathcal{A}) = \mathbf{F}$.

Sia ora $\mathcal{A}$ una formula assegnata, e siano $X_1, \ldots, X_n$ le variabili proposizionali che vi occorrono. Dato un qualunque assegnamento I, è immediato verificare che il valore di verità $I(\mathcal{A})$ dipende *soltanto* dai valori di verità delle sue variabili: $I(X_1), \ldots, I(X_n)$. Dunque, per determinare completamente la *semantica* di una formula assegnata al variare di tutti i possibili assegnamenti, è sufficiente considerare soltanto un numero finito di casi, che possono essere visualizzati mediante le cosidette *tavole di verità*.

In generale, se una formula contiene n variabili, la sua tavola di verità consisterà di 2^n righe, una per ognuno dei possibili assegnamenti di valori di verità alle sue variabili. Vediamo un esempio per illustrare come si procede in pratica.

Consideriamo la formula "$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Z$". Ci sono $2^3 = 8$ modi possibili di assegnare valori di verità alle 3 variabili X, Y e Z. Per ciascuno di questi 8 casi, determiniamo il valore di verità delle *sottoformule* "$X \rightarrow Y$" e "$\neg Z$" e infine, a partire da questi, otteniamo il valore di verità della formula assegnata.

X	Y	Z	$X \to Y$	$\neg Z$	$(X \to Y) \wedge (\neg Z)$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**

Più formalmente, se $\mathcal{A}$ è una formula nella quale occorrono le variabili $X_1, \ldots, X_n$, allora la sua tavola di verità può essere vista come una funzione

$$\tau_{\mathcal{A}} : \mathrm{Fun}\left(\{1, \ldots, n\}, \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}\right) \longrightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}.$$

Infatti, ogni assegnamento α dei valori di verità alle variabili di $\mathcal{A}$ può essere visto come una funzione $\chi_\alpha : \{1, \ldots, n\} \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ dove intendiamo che $\chi_\alpha(i) = \alpha(X_i)$. Nella tavola di verità, ad ognuno di questi assegnamenti $\alpha \in \mathrm{Fun}\left(\{1, \ldots, n\}, \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}\right)$ viene associato il corrispondente valore di verità.

Esercizio 1.12. Dimostrare che per ogni funzione

$$f : \mathrm{Fun}\left(\{1, \ldots, n\}, \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}\right) \longrightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$$

esiste una formula $\mathcal{A}$ nella quale compaiono le variabili $X_1, \ldots, X_n$ tale che la corrispondente tavola di verità $\tau_{\mathcal{A}} = f$.

4. Formule soddisfacibili, tautologie, contraddizioni

DEFINIZIONE 1.13. Sia $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-formula proposizionale.

- $\mathcal{A}$ si dice *soddisfacibile* se è vera in almeno una interpretazione.
- $\mathcal{A}$ si dice *tautologia* se è vera in ogni interpretazione.
- $\mathcal{A}$ si dice *contraddizione* se è falsa in ogni interpretazione.

Dunque $\mathcal{A}$ è soddisfacibile se e solo se $\mathcal{A}$ *non* è una contraddizione se e solo se $\neg\mathcal{A}$ *non* è una tautologia. Notiamo che una formula è soddisfacibile se e solo se nella sua tabella di verità compare almeno un valore **V**. Analogamente, una formula è una tautologia (o una contraddizione) se e solo se nella sua tabella di verità compaiono solo **V** (o solo **F**, rispettivamente).

Per quanto osservato sopra, verificare se una formula assegnata è soddisfacibile oppure no, è una tautologia oppure no, è una contraddizione oppure no, richiede una semplice procedura meccanica che consiste nella scrittura della corrispondente tavola di verità. Tuttavia tale procedura ha il difetto di richiedere molto "tempo" per essere eseguita. Ad esempio, supponiamo di voler stabilire se la formula seguente, che contiene le 10 variabili proposizionali $A, B, \dots, L$, è una tautologia o meno.[4]

$$\Big[\,(A \wedge B \to C) \to \big((D \wedge E \to (F \to G)) \leftrightarrow (\neg H \to I \wedge L)\big)\Big] \leftrightarrow$$
$$\Big[\big((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \to (D \wedge F \to (E \to G))\big) \leftrightarrow \big((A \to (B \to C)) \to (H \vee (I \wedge L))\big)\Big]$$

Nonostante si tratti di una formula che occupa lo spazio di due sole righe, non è consigliabile scriverne esplicitamente la tavola di verità. Questa consiste infatti di oltre 1.000 righe e vi compaiono più di 36.000 valori di verità![5] Esistono altri metodi per controllare se una formula è una tautologia, che in molti casi pratici sono molto veloci. Tuttavia nei casi generali tutte le procedure note richiedono una quantità di passaggi che cresce in modo esponenziale rispetto al numero delle variabili. Il problema di stabilire se esistano metodi essenzialmente più efficienti, cioè che permettano cioè di riconoscere le tautologie in tempo polinomiale anziché esponenziale, è tuttora irrisolto.[6]

ESERCIZIO 1.14 (Modus Ponens). Se le formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sono tautologie, allora anche $\mathcal{B}$ è una tautologia.

[4] Per i curiosi: è una tautologia!

[5] Precisamente ci sono $2^{10} = 1.024$ righe, e un totale di $1.024 \cdot (10+26) = 36.864$ valori di verità, in corrispondenza di ognuna delle 10 variabili e di ognuna delle 26 sottoformule che si considerano.

[6] Lo studio matematico di questo tipo di problemi rientra nell'ambito della *teoria della complessità*, una delle intersezioni tra logica matematica e informatica teorica.

Esercizio 1.15. Per ogni formula $\mathcal{A}$, le formule seguenti sono tautologie: $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathcal{A}$.

Esercizio 1.16 (Assiomi di Łukasiewicz-Frege-Hilbert-Mendelson). Per ogni scelta delle formule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, verificare che le seguenti formule sono tautologie:

(1) $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$;
(2) $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$;
(3) $(\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A})$.

Esercizio 1.17. Dimostrare che non esistono tautologie $\mathcal{A}$ dove compaiono soltanto i connettivi $\vee$ e $\wedge$.

Definizione 1.18. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili che occorrono nella formula $\mathcal{A}$, e siano $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ formule arbitrarie. Denotiamo con

$$\mathcal{A}\,[\mathcal{B}_1/X_1, \ldots, \mathcal{B}_n/X_n]$$

la formula ottenuta rimpiazzando simultaneamente in $\mathcal{A}$ tutte le occorrenze di ogni variabile X_i con $\mathcal{B}_i$, per $i = 1, \ldots, n$.

Ad esempio, se $\mathcal{A} = (X \to Y) \to (\neg Z \vee \neg X)$, $\mathcal{B} = Z \to X$, $\mathcal{C} = \neg W$ e $\mathcal{D} = Y \to Z$, allora

$$\mathcal{A}\,[\mathcal{B}/X, \mathcal{C}/Y, \mathcal{D}/Z] \;=\; ((Z \to X) \to \neg W) \to (\neg(Y \to Z) \vee \neg(Z \to X)).$$

Esercizio 1.19. Siano $X_1, \ldots, X_n$ tutte e sole le variabili che occorrono nella formula $\mathcal{A}$. Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una tautologia se e solo se la formula $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1/X_1, \ldots, \mathcal{B}_n/X_n)$ è una tautologia per tutte le formule $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$.

Generalizziamo la definizione di sopra per formule qualunque.

Definizione 1.20. Sia $\mathcal{A}$ una formula e $\mathcal{A}'$ una sua sottoformula. Per ogni formula $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']$ è la formula ottenuta rimpiazzando tutte le occorrenze di $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}$ con $\mathcal{B}$.

Attenzione: A differenza del caso delle variabili atomiche (Definizione 1.18), nel caso di più sostituzioni (Definizione 1.20) è necessario specificare l'ordine. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ è la formula $X \vee (X \to Y)$, la sostituzione $\mathcal{A}\,[(X \to Y)/X][Y/(X \to Y)]$ determina la formula $Y \vee (Y \to Y)$. Infatti la prima sostituzione $\mathcal{A}[(X \to Y)/X]$ produce la formula $\mathcal{B} = (X \to Y) \vee ((X \to Y) \to Y)$, e la seconda sostituzione $\mathcal{B}[Y/(X \to Y)]$ produce la formula $Y \vee (Y \to Y)$. Invece, le due sostituzioni effettuate nell'ordine inverso $\mathcal{A}\,[(Y/(X \to Y)][(X \to Y)/X]$ producono $(X \to Y) \vee Y$, come è facile verificare.

ESERCIZIO 1.21. Verificare che le sostituzioni soddisfano le seguenti proprietà di coerenza, dove conveniamo che $\mathcal{A}\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = \mathcal{A}$ nel caso in cui $\mathcal{A}'$ *non* sia una sottoformula di $\mathcal{A}$:

- $(\neg\mathcal{A})\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = \neg(\mathcal{A}\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'],$
- $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = (\mathcal{A}_1\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']) \wedge (\mathcal{A}_2\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']).$
- $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = (\mathcal{A}_1\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']) \vee (\mathcal{A}_2\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']).$
- $(\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2)\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = (\mathcal{A}_1\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']) \to (\mathcal{A}_2\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']).$
- $(\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{A}_2)\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}'] = (\mathcal{A}_1\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']) \leftrightarrow (\mathcal{A}_2\,[\mathcal{B}/\mathcal{A}']).$

5. Equivalenze e implicazioni logiche

Due formule sono logicamente equivalenti se sono equivalenti dal punto di vista semantico, cioè se non sono distinguibili da alcuna interpretazione. Precisamente:

DEFINIZIONE 1.22. Diciamo che due formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono *logicamente equivalenti*, e scriviamo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, se per ogni interpretazione I si ha che $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B})$.

Date due formule che contengono le stesse variabili, per vedere se sono logicamente equivalenti o no, si compilano le rispettive tavole di verità e si controlla se i corrispondenti valori di verità sono uguali o meno. Ad esempio, l'equivalenza logica $(\neg X \vee Y) \equiv (X \to Y)$ è dimostrata dalla seguente tavola di verità:

X	Y	$\neg X$	$\neg X \vee Y$	$X \to Y$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**

È immediato verificare la seguente

OSSERVAZIONE 1.23. *Due formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono logicamente equivalenti se e solo se la formula $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ è una tautologia.*

ESERCIZIO 1.24. Se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$ e $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}'$ allora:

- $\neg\mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A}'$,
- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}' \wedge \mathcal{B}'$,
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$,
- $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$,
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}' \leftrightarrow \mathcal{B}'$.

Qua sotto sono elencate alcune equivalenze logiche notevoli.

Esercizio 1.25. Verificare che le seguenti equivalenze logiche valgono per ogni scelta delle formule $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

(1) *Proprietà associative:*
- $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$;
- $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$;

(2) *Proprietà distributive:*
- $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$;
- $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$;

(3) *Leggi di De Morgan*:
- $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$;
- $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$;

(4) *Contronominale*: $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$;

(5) $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;

(6) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$;

(7) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}$;

(8) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$.

Vista l'associatività (a meno di equivalenza logica) della congiunzione e della disgiunzione, è consuetudine scrivere $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ o $\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n$ senza uso di parentesi, perché tutte le possibili diverse scritture sono comunque formule logicamente equivalenti.

Teorema 1.26 (di sostituzione). *Sia $\mathcal{B}$ una sottoformula di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{B}$ allora $\mathcal{A}[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}$.*

Dim. Procediamo per induzione sulla costruzione della formula $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è una formula atomica, l'unica sottoformula di $\mathcal{A}$ è la formula $\mathcal{A}$ stessa, e quindi la tesi è banale. Nel passo induttivo basta usare le proprietà di coerenza delle sostituzioni con i connettivi e con le equivalenze logiche elencate negli Esercizi 1.21 e 1.24. Vediamo un paio di casi in dettaglio, gli altri sono del tutto simili.

Se $\mathcal{A} = \neg\mathcal{A}'$, allora la sottoformula $\mathcal{B}$ è la formula $\mathcal{A}$ stessa, nel qual caso la tesi è banale, oppure $\mathcal{B}$ è sottoformula di $\mathcal{A}'$. Applicando l'ipotesi induttiva sappiamo che $\mathcal{A}'[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}'$ e quindi, visto che negazioni di formule equivalenti sono equivalenti:

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] = (\neg\mathcal{A}')[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] = \neg(\mathcal{A}'[\mathcal{B}'/\mathcal{B}]) \equiv \neg\mathcal{A}' = \mathcal{A}.$$

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$, allora la sottoformula $\mathcal{B}$ è la formula $\mathcal{A}$ stessa, nel qual caso la tesi è banale, oppure $\mathcal{B}$ è sottoformula di $\mathcal{A}_1$ o di $\mathcal{A}_2$.

Dall'ipotesi induttiva sappiamo che $\mathcal{A}_1[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}_2$.[7] Visto che congiunzioni di formule equivalenti sono equivalenti:

$$\mathcal{A}\,[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] = (\mathcal{A}_1\,[\mathcal{B}'/\mathcal{B}]) \wedge (\mathcal{A}_2\,[\mathcal{B}'/\mathcal{B}]) \equiv \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}.$$

□

Esercizio 1.27. Utilizzando le equivalenze logiche dell'Esercizio 1.25 e la proprietà di sostituzione dell'Esercizio 1.26, dimostrare che la formula

$$\Big[\,(\,A \wedge B \to C\,) \to (\,(\,D \wedge E \to (F \to G)\,) \leftrightarrow (\,\neg H \to I \wedge L\,)\,)\,\Big] \;\leftrightarrow$$
$$\Big[\,(\,(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \to (D \wedge F \to (E \to G))\,) \leftrightarrow (\,(A \to (B \to C)) \to (H \vee (I \wedge L))\,)\,\Big]$$

menzionata a pagina 18 è una tautologia.

Nel nostro linguaggio abbiamo considerato 5 connettivi, cioè il connettivo unario $\neg$, e i connettivi binari $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$. Viste le equivalenze (5) e (6) dell'esercizio precedente, avremmo potuto restringerci a considerare i soli connettivi $\neg, \vee$, e tutti gli altri sarebbero stati "definibili" a partire da quei due. Precisamente, vale la seguente proprietà, la cui verifica è lasciata per esercizio.

Osservazione 1.28. *Per ogni formula $\mathcal{A}$ esiste una formula $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ nella quale compaiono i soli connettivi $\neg, \vee$.*

Dim. Un modo diretto per ottenere $\mathcal{B}$ è il seguente. Nella costruzione induttiva di $\mathcal{A}$ sostituiamo:

- ogni sottoformula del tipo $(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ con la formula logicamente equivalente $\neg(\neg\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{D})$;
- ogni sottoformula del tipo $(\mathcal{C} \to \mathcal{D})$ con la formula logicamente equivalente $(\neg\mathcal{C} \vee \mathcal{D})$;
- ogni sottoformula del tipo $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ con la formula logicamente equivalente $\neg(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \vee \neg(\neg\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{D})$.

La tesi segue dal Teorema 1.26 di sostituzione. □

Esercizio 1.29. Dimostrare che la proprietà di sopra vale se al posto dei due connettivi $\neg, \vee$ consideriamo $\neg, \wedge$ oppure $\neg, \to$; ma *non* vale se consideriamo i due connettivi $\vee, \to$ oppure $\wedge, \vee$ oppure $\to, \leftrightarrow$, oppure $\neg, \leftrightarrow$.

In realtà avremmo potuto ridurci a considerare addirittura un unico connettivo, ma a questo scopo avremmo dovuto definirne uno nuovo, ad esempio il seguente.

[7] Ricordiamo la convenzione che quando $\mathcal{B}$ *non* è sottoformula di $\mathcal{A}_i$ allora la sostituzione "vuota" $\mathcal{A}_i[\mathcal{B}'/\mathcal{B}] = \mathcal{A}_i$.

DEFINIZIONE 1.30. Il connettivo binario *"entrambe false"* $\updownarrow$ è determinato dalla seguente tavola di verità:

P	Q	$P \updownarrow Q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

ESERCIZIO 1.31. Per ogni formula $\mathcal{A}$ esiste una formula $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ nella quale compare soltanto il connettivo $\updownarrow$.

DEFINIZIONE 1.32. Si dice *letterale* una variabile proposizionale X o la sua negazione $\neg X$. Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)* se è una disgiunzione di congiunzione di letterali; si dice in *forma normale congiuntiva (CNF)* se è una congiunzione di disgiunzioni di letterali.

Ad esempio, la formula $\mathcal{A}$ qua sotto è DNF, la formula $\mathcal{B}$ è CNF, ma la formula $\mathcal{C}$ non è né DNF né CNF:

$$\mathcal{A} = (\neg X_1 \wedge X_2) \vee X_3\,;\ \mathcal{B} = X_1 \wedge (\neg X_2 \vee X_2)\,;\ \mathcal{C} = (X_1 \vee \neg X_2) \vee (X_3 \wedge X_4)\,.$$

ESERCIZIO 1.33. Dimostrare che ogni formula è logicamente equivalente ad una formula DNF e ad una formula CNF.

ESERCIZIO 1.34. Denotiamo con $\mathcal{A}^*$ la formula che si ottiene da $\mathcal{A}$ sostituendo simultaneamente ogni simbolo $\wedge$ con $\vee$, e ogni simbolo $\vee$ con $\wedge$. Dimostrare che $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{A}^* \equiv \mathcal{B}^*$.

Un altro fondamentale concetto semantico è quello di implicazione logica. Una formula ne implica logicamente un'altra se ogni volta che è vera la prima è vera anche la seconda.

DEFINIZIONE 1.35. Diciamo che la formula $\mathcal{A}$ *implica logicamente* la formula $\mathcal{B}$, o che $\mathcal{B}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{A}$, se per ogni interpretazione I dove $I(\mathcal{A}) = \mathbf{V}$, si ha anche $I(\mathcal{B}) = \mathbf{V}$. In questo caso si usa la notazione $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

Supponiamo di avere compilato la tavola di verità di due formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ contenenti le stesse variabili. Avremo allora che $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ se e solo se in ogni riga dove compare **V** per la formula $\mathcal{A}$ compare **V** anche per la formula $\mathcal{B}$. Ad esempio, consideriamo le formule $\mathcal{A} = \neg X \leftrightarrow Y$ e $\mathcal{B} = X \vee Y$. Nella seconda e terza riga, che sono le uniche dove compare il valore **V** per la formula $\mathcal{A}$, c'è il valore **V** anche per la formula $\mathcal{B}$. Dunque concludiamo che $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

X	Y	$\neg X$	$\neg X \leftrightarrow Y$	$X \vee Y$
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**F**

È immediato verificare che vale la:

Osservazione 1.36. *$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ se e solo se la formula $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una tautologia.*

È importante osservare che l'*implicazione* $\to$ (chiamata anche *implicazione materiale*) e l'*implicazione logica* $\models$ sono sostanzialmente diverse. La prima è un simbolo che fa parte del linguaggio formale, dunque è un oggetto puramente sintattico. La seconda invece è di natura semantica, ed è una relazione "metalinguistica" (cioè non appartenente al linguaggio formale) che può sussistere tra formule proposizionali.

Una considerazione può aiutare a chiarire la differenza. Assegnate due formule qualunque $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, in ogni interpretazione almeno una delle due implicazioni

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}\,,\ \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

risulta vera. Infatti, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è falsa soltanto quando $\mathcal{A}$ è vera e $\mathcal{B}$ è falsa, ma in questo caso è l'altra implicazione $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ad essere vera. Tuttavia, non necessariamente una delle due formule implica logicamente l'altra. In altri termini, mentre $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ è una tautologia, non si ha necessariamente che una tra le due formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ lo sia. Ad esempio, se X e Y sono due variabili, nè la formula $X \to Y$ nè la formula $Y \to X$ è una tautologia, mentre la formula $(X \to Y) \vee (Y \to X)$ lo è.

Esercizio 1.37. Verificare le seguenti implicazioni logiche, dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono formule qualunque:

(1) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \models \mathcal{A}$;
(2) $\mathcal{A} \models (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$;
(3) Se $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$, allora $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$;
(4) $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ se e solo se $\neg\mathcal{B} \models \neg\mathcal{A}$.

Esercizio 1.38. Stabilire se ciascuna delle seguenti proprietà è vera per ogni scelta delle formule $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

(1) Se $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$, allora $\mathcal{A} \models (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$;
(2) Se $\mathcal{A} \models (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, allora $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$;

(3) Se $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$ o $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$, allora $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \models \mathcal{C}$;
(4) Se $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \models \mathcal{C}$, allora $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$ o $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$;
(5) Se $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$, allora $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$.
(6) Se $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \models (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, allora $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$.

CAPITOLO 2

Teorie proposizionali e modelli

1. Teorie proposizionali

DEFINIZIONE 2.1. Per *teoria* del calcolo proposizionale si intende un qualunque insieme T (eventualmente vuoto) di $\mathcal{L}$-formule.

Introduciamo ora alcune importanti nozioni semantiche.

DEFINIZIONE 2.2. Si dice che l'interpretazione I è un *modello* della teoria T, e si scrive $I \models T$, se I rende vera T, cioè se $I(\mathcal{A}) = \mathbf{V}$ per tutte le formule $\mathcal{A} \in T$.

Diamo ora una generalizzazione della nozione di implicazione logica $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ vista nel paragrafo precedente.

DEFINIZIONE 2.3. Diciamo che la teoria T *implica logicamente* la formula $\mathcal{B}$, o che $\mathcal{B}$ è *conseguenza logica* di T, se $\mathcal{B}$ è vera in ogni modello di T. In questo caso scriviamo $T \models \mathcal{B}$.

Ovviamente se $T \models \mathcal{A}$ e $T \subseteq S$ allora anche $S \models \mathcal{A}$.

ESERCIZIO 2.4. Dimostrare che:

(1) $T \models \mathcal{A}$ e $T \models \mathcal{B}$ se e solo se $T \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$;
(2) Se $T \models \mathcal{A}$ o $T \models \mathcal{B}$ allora $T \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
(3) Se $T \models \mathcal{A}$ e $T \models \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ allora $T \models \mathcal{B}$.

Dimostrare con un controesempio che *non* vale l'implicazione:

(4) Se $T \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ allora $T \models \mathcal{A}$ o $T \models \mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE 2.5 (Procedimento per casi). *Sia T una teoria e siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ formule. Se $T \cup \{\mathcal{B}\} \models \mathcal{A}$ e $T \cup \{\neg\mathcal{B}\} \models \mathcal{A}$ allora $T \models \mathcal{A}$.*

DIM. Dimostriamo la contronominale, e supponiamo che $T \not\models \mathcal{A}$, cioè che esista un modello I di T dove $\mathcal{A}$ è falsa. Si hanno due possibilità. Se $\mathcal{B}$ è vera in I, allora I è un modello di $T \cup \{\mathcal{B}\}$ dove $\mathcal{A}$ è falsa, e concludiamo che $T \cup \{\mathcal{B}\} \not\models \mathcal{A}$; se $\mathcal{B}$ è falsa in I, allora I è un modello di $T \cup \{\neg\mathcal{B}\}$ dove $\mathcal{A}$ è falsa, e abbiamo che $T \cup \{\neg\mathcal{B}\} \not\models \mathcal{A}$. □

Vale la seguente proprietà.

TEOREMA 2.6 (Deduzione semantica). *Sia T una teoria e siano $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$ formule. Allora*[1]

$$T, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{B} \iff T \models \mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}\,.$$

Notiamo che quando $T = \emptyset$ e $n = 1$, ritroviamo la nozione di implicazione logica $\mathcal{A}_1 \models \mathcal{B}$ introdotta nella Definizione 1.35.

DIM. $\Rightarrow$ Fissato un modello $I \models T$, distinguiamo due casi. Se c'è una formula $\mathcal{A}_i$ che è falsa in I, allora $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ è falsa in I e dunque l'implicazione $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ è vera in I a prescindere dalla verità o falsità di $\mathcal{B}$. Se invece ogni $\mathcal{A}_i$ è vera in I, allora I è un modello di $T \cup \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$. Dall'ipotesi segue che $\mathcal{B}$ è vera in I. Visto che $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ e $\mathcal{B}$ sono entrambe vere in I, anche l'implicazione $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ è vera in I.

$\Leftarrow$ Sia I è un modello qualunque di $T \cup \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$. Visto che $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sono tutte vere in I, anche $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$ è vera in I. Ma I è in particolare un modello di T e per ipotesi l'implicazione $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ è vera in I. Infine notiamo che da $I(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) = \mathbf{V}$ e $I(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}) = \mathbf{V}$ segue necessariamente che $I(\mathcal{B}) = \mathbf{V}$. $\square$

DEFINIZIONE 2.7. Una teoria T si dice *soddisfacibile* se ammette un modello; si dice *insoddisfacibile* in caso contrario.

OSSERVAZIONE 2.8. *Sia T una teoria. Le seguenti tre proprietà sono equivalenti:*

(1) *T è soddisfacibile;*
(2) *Per ogni formula $\mathcal{A}$, se $T \models \mathcal{A}$ allora $T \not\models \neg\mathcal{A}$;*
(3) *Esiste almeno una formula $\mathcal{B}$ con $T \not\models \mathcal{B}$.*

Di conseguenza, passando alle negazioni, anche le seguenti tre proprietà sono tra loro equivalenti:

(4) *T è insoddisfacibile;*
(5) *Esiste una formula $\mathcal{A}$ tale che $T \models \mathcal{A}$ e $T \models \neg\mathcal{A}$;*
(6) *$T \models \mathcal{B}$ per ogni formula $\mathcal{B}$.*

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia I un modello di T. Se $T \models \mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}$ è vera in I e dunque $\neg\mathcal{A}$ è falsa in I. Concludiamo che $T \not\models \neg\mathcal{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se per assurdo la tesi non valesse, per ogni formula $\mathcal{A}$ si avrebbe sia $T \models \mathcal{A}$ che $T \models \neg\mathcal{A}$, e quindi T non potrebbe avere modelli.

[1] Con abuso di notazione, in accordo con la consuetudine, abbiamo scritto $T, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{B}$ per intendere $T \cup \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{B}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Per ipotesi deve esistere un'interpretazione I che è modello di T e dove $\mathcal{B}$ è falsa. In particolare T è soddisfacibile. $\square$

PROPOSIZIONE 2.9 (Reductio ad absurdum). *Sia T una teoria e $\mathcal{A}$ una formula. Allora:*

(1) $T \models \mathcal{A} \Leftrightarrow T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ *è insoddisfacibile.*
(2) $T \models \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow T \cup \{\mathcal{A}\}$ *è insoddisfacibile.*

DIM. Le dimostrazioni delle due proprietà sono del tutto simili. Vediamo in dettaglio (1).

$\Rightarrow$. Se $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ fosse soddisfacibile esisterebbe un suo modello I. Un tale I sarebbe un modello di T dove $\neg\mathcal{A}$ è vera, e quindi dove $\mathcal{A}$ è falsa. Concludiamo che $T \not\models \mathcal{A}$.

$\Leftarrow$. Sia I un modello di T. Per l'ipotesi, I *non* è un modello di $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$, dunque $\neg\mathcal{A}$ è falsa in I, e quindi $\mathcal{A}$ è vera in I. Abbiamo mostrato che ogni modello di T è anche modello di $\mathcal{A}$, cioè la tesi.[2] $\square$

ESERCIZIO 2.10. Supponiamo che $T \models \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

(1) Dimostrare che se la teoria $T \cup \{\mathcal{B}\}$ è insoddisfacibile allora anche $T \cup \{\mathcal{A}\}$ è insoddisfacibile.
(2) È vera l'implicazione inversa della (1)?

PROPOSIZIONE 2.11. *Sia T una teoria soddisfacibile e $\mathcal{A}$ una formula. Allora $T \cup \{\mathcal{A}\}$ è soddisfacibile o $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ soddisfacibile.*

DIM. Se $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ è insoddisfacibile, allora abbiamo visto che necessariamente $T \models \mathcal{A}$. In questo caso, prendiamo un modello I di T, che esiste per ipotesi. Un tale modello I è anche un modello di $T \cup \{\mathcal{A}\}$. $\square$

DEFINIZIONE 2.12. Una teoria T si dice *semanticamente completa* se per ogni formula $\mathcal{A}$ vale una ed una sola delle due proprietà: $T \models \mathcal{A}$, $T \models \neg\mathcal{A}$; cioè $T \models \mathcal{A} \Leftrightarrow T \not\models \neg\mathcal{A}$.

OSSERVAZIONE 2.13. *Se T è semanticamente completa allora T è necessariamente soddisfacibile.*

DIM. Una delle caratterizzazioni della soddisfacibilità è la proprietà: $T \models \mathcal{A} \Rightarrow T \not\models \neg\mathcal{A}$ (vedi Osservazione 2.8). $\square$

ESERCIZIO 2.14. Sia T una teoria. Verificare che sono proprietà equivalenti:

---

[2] Notiamo che non stiamo assumendo che T abbia modelli. Nel caso in cui T fosse insoddisfacibile, avremmo che $T \models \mathcal{A}$ per ogni formula $\mathcal{A}$.

(1) T è semanticamente completa ;
(2) Per ogni formula $\mathcal{A}$, si ha $T \models \mathcal{A} \Leftrightarrow T \not\models \neg\mathcal{A}$;
(3) T è soddisfacibile e per ogni formula $\mathcal{A}$, $T \not\models \mathcal{A} \Rightarrow T \models \neg\mathcal{A}$;
(4) T ha un unico modello .

Esercizio 2.15. Sia T una teoria soddisfacibile. Dimostrare che sono proprietà equivalenti:

(1) T è semanticamente completa ;
(2) Per tutte le formule $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, vale $T \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow T \models \mathcal{A}$ o $T \models \mathcal{B}$;
(3) Per tutte le formule $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, vale $T \not\models \mathcal{A} \to \mathcal{B} \Leftrightarrow T \models \mathcal{A}$ e $T \models \neg\mathcal{B}$.

L'insieme delle *conseguenze logiche* di una teoria T è denotato con

$$\mathrm{LC}(T) = \{\mathcal{A} \mid T \models \mathcal{A}\}.$$

Con questa terminologia, $\mathrm{LC}(\emptyset)$ è l'insieme delle tautologie. Infatti, banalmente, *tutte* le interpretazioni sono modelli della teoria vuota $T = \emptyset$, e le formule vere in tutte le interpretazioni sono le tautologie.

Definizione 2.16. Una teoria T si dice *semanticamente chiusa* se $T = \mathrm{LC}(T)$, cioè se $T \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \in T$.

Proposizione 2.17. *Sia T una teoria. Allora:*

(1) *T è soddisfacibile se e solo se $LC(T)$ è soddisfacibile ;*
(2) *$LC(T)$ è una teoria semanticamente chiusa, cioè $LC(LC(T))) = LC(T)$.*

Dim. (1). Banalmente $T \subseteq \mathrm{LC}(T)$, e dunque se $\mathrm{LC}(T)$ è soddisfacibile, anche T lo è. Viceversa, se I è modello di T allora I è anche modello di $\mathrm{LC}(T)$, perché se $\mathcal{B} \in \mathrm{LC}(T)$, cioè se $T \models \mathcal{B}$, per definizione di conseguenza logica abbiamo che $\mathcal{B}$ è vera in I.

(2). Una inclusione è immediata perché $T \subseteq \mathrm{LC}(T) \Rightarrow \mathrm{LC}(T) \subseteq \mathrm{LC}(\mathrm{LC}(T))$. Per l'altra inclusione, supponiamo che $\mathcal{B} \notin \mathrm{LC}(T)$, cioè che $T \not\models \mathcal{B}$, e prendiamo un modello $I \models T$ dove $\mathcal{B}$ è falsa. Abbiamo notato sopra che una tale interpretazione I è anche modello di $\mathrm{LC}(T)$, e quindi $\mathrm{LC}(T) \not\models \mathcal{B}$, cioè $\mathcal{B} \notin \mathrm{LC}(\mathrm{LC}(T))$. $\square$

Esercizio 2.18. Una teoria T è semanticamente completa se e solo se $\mathrm{LC}(T)$ è semanticamente completa.

Proposizione 2.19. *Sia T una teoria. Sono proprietà equivalenti:*

(1) *T è semanticamente chiusa e semanticamente completa ;*

(2) *T è soddisfacibile e per ogni formula $\mathcal{A}$ vale una ed una sola delle due proprietà: $\mathcal{A} \in T$, $\neg\mathcal{A} \in T$; cioè, $\mathcal{A} \in T \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \notin T$.*

(3) *T è massimale rispetto all'inclusione tra le teorie soddisfacibili.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2). Visto che T è semanticamente completa, T è soddisfacibile. Inoltre, basta notare che quando la teoria T è semanticamente chiusa, le proprietà $T \models \mathcal{A}$ e $T \models \neg\mathcal{A}$ equivalgono rispettivamente a $\mathcal{A} \in T$ e $\neg\mathcal{A} \in T$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supponiamo per assurdo che esista un teoria soddisfacibile T' che estende propriamente T, e prendiamo $\mathcal{A} \in T' \setminus T$. Visto che $\mathcal{A} \notin T$ abbiamo che $\neg\mathcal{A} \in T$, e quindi $\neg\mathcal{A} \in T'$. Ma allora T' è insoddisfacibile perché $\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \in T'$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo che $T \models \mathcal{A}$. Prendiamo un modello I di T. La formula $\mathcal{A}$ è vera in I, e dunque I è anche un modello di $T \cup \{\mathcal{A}\}$, che è quindi una teoria soddisfacibile. Per la massimalità di T deve essere $T \cup \{\mathcal{A}\} = T$, cioè $\mathcal{A} \in T$. Questo mostra che T è semanticamente chiusa. Visto che T è soddisfacibile, per mostrare la completezza resta da vedere che vale l'implicazione $T \not\models \mathcal{A} \Rightarrow T \models \neg\mathcal{A}$. Se $T \not\models \mathcal{A}$, per la Proposizione 2.9, la teoria $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ è soddisfacibile, e per la massimalità di T deve essere allora $T \cup \{\neg\mathcal{A}\} = T$, quindi $\neg\mathcal{A} \in T$, e banalmente $T \models \neg\mathcal{A}$. $\square$

I due esempi seguenti illustrano come i modelli di teorie proposizionali possano catturare le strutture matematiche.

Esempio 2.20 (Teoria proposizionale degli insiemi ordinati). Dato un insieme A, consideriamo il linguaggio proposizionale

$$\mathcal{L}_A = \{X_{ab} \mid a, b \in A\}$$

contenente una variabile per ogni coppia ordinata di elementi di A. Sia T^A_{poset} la $\mathcal{L}_A$-teoria che consiste delle seguenti formule:[3]

- $\neg X_{aa}$ per ogni $a \in A$;
- $X_{ab} \to \neg X_{ba}$ per ogni $a, b \in A$;
- $(X_{ab} \wedge X_{bc}) \to X_{ac}$ per ogni $a, b, c \in A$;

e sia T^A_{ord} la teoria che oltre agli assiomi di T^A_{poset} contiene anche le formule:

- $(X_{ab} \vee X_{ba})$ per ogni $a \neq b$ in A.

[3] Notiamo che la proprietà *irriflessiva* "$a \not< a$" segue dalla proprietà *asimmetrica* "$a < b \Rightarrow b \not< a$". Tuttavia, anche se ridondante, è consuetudine includerla nelle tre proprietà che definiscono gli ordini parziali stretti.

Per ogni $\mathcal{L}_A$-interpretazione I, definiamo la corrispondente relazione binaria $\prec_I$ su A ponendo $a \prec_I b \Leftrightarrow I(X_{ab}) = \mathbf{V}$. Come si verifica direttamente:

- $I \models T^A_{\text{poset}}$ se e solo $(A, \prec_I)$ è un *insieme parzialmente ordinato*;
- $I \models T^A_{\text{ord}}$ se e solo $(A, \prec_I)$ è un *ordinamento totale.*

Ricordiamo che un *grafo* Γ *su* V è una coppia $\Gamma = \langle V, L\rangle$ dove V è un insieme di elementi detti *vertici*, e L è un insieme di coppie di elementi distinti di V, detti *lati.*

Esempio 2.21 (Teoria proposizionale dei grafi). Dato un insieme V, consideriamo il linguaggio proposizionale

$$\mathcal{L}_V = \{X_{ab} \mid a, b \in V, a \neq b\}$$

contenente una variabile per ogni coppia di elementi di V.

Ad ogni $\mathcal{L}_V$-interpretazione I, corrisponde il grafo $\Gamma_I = \langle V, E_I\rangle$ avente V come insieme di vertici e $E_I = \{\{a, b\} \mid I(X_{ab}) = \mathbf{V}\}$ come insieme di lati. Viceversa, dato un grafo $\Gamma = \langle V, E\rangle$ avente V come insieme di vertici, si ottiene una $\mathcal{L}_V$-interpretazione I_Γ ponendo $I_\Gamma(X_{ab}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \{a, b\} \in E$.

Ricordiamo che un grafo $\Gamma = \langle V, L\rangle$ si dice *k-colorabile* se si possono colorare i suoi vertici con k colori in modo che nessun lato abbia vertici dello stesso colore. Più formalmente, $\Gamma = \langle V, L\rangle$ è *k-colorabile* se esiste $f : V \to \{1, \dots, k\}$ tale che $f(a) \neq f(b)$ per ogni $\{a, b\} \in L$.

Esempio 2.22 (Teoria proposizionale dei grafi k-colorabili). Dato un insieme di verici V e un numero naturale k, consideriamo il linguaggio proposizionale

$$\mathcal{L}_{V,k} = \{X_{ab} \mid a, b \in V, a \neq b\} \cup \{Y^i_a \mid a \in V,\ i = 1, \dots, k\}.$$

Notiamo che $\mathcal{L}_{V,k}$ include il linguaggio $\mathcal{L}_V$ considerato nell'Esempio 2.21, e contiene inoltre le variabili Y^i_a cui attribuiremo il significato: "il vertice a ha colore i". Infine sia $T_{V,k}$ la teoria che contiene le formule:

- $\bigvee_{i=1}^k Y^i_a$ per ogni $a \in V$;
- $Y^i_a \to \left(\bigwedge_{j\neq i} \neg Y^j_a\right)$ per ogni $a \in V$ e per ogni $i = 1, \dots, k$;
- $(X_{ab} \wedge Y^i_a) \to \neg Y^i_b$ per ogni $a \neq b$ in V e per ogni $i = 1, \dots, k$.

Il significato attribuito al primo e al secondo gruppo di formule è che ad ogni vertice a è assegnato un colore i e che tale colore è unico. Il terzo gruppo di formule esprime la proprietà che in ogni lato i vertici hanno colori diversi.

Ad ogni $\mathcal{L}_{V,k}$-interpretazione I, corrisponde il grafo k-colorato $\Gamma_I = \langle V, E_I \rangle$ avente V come insieme di vertici, $E_I = \{\{a, b\} \mid I(X_{ab}) = \mathbf{V}\}$ come insieme di lati, e dove il vertice a ha colore i se e solo se $I(Y_a^i) = \mathbf{V}$.

Viceversa, dato un grafo k-colorato $\Gamma = \langle V, E \rangle$ con insieme di vertici V, si ottiene una $\mathcal{L}_{V,k}$-interpretazione I_Γ ponendo $I_\Gamma(X_{ab}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \{a, b\} \in E$, e ponendo $I(Y_a^i) = \mathbf{V}$ se e solo se il vertice a ha colore i.

Notiamo inoltre che un grafo $\Gamma = \langle V, E \rangle$ è k-colorabile se e solo se la seguente teoria è soddisfacibile:

$$T_{\Gamma,k} := T_{V,k} \cup \{X_{ab} \mid \{a, b\} \in E\}.$$

Infatti, ad ogni modello $I \models T_{V,k}$ corrisponde la k-colorazione $f_I : V \to \{1, \ldots, k\}$ dove $f_I(a) = i \Leftrightarrow I(Y_a^i) = \mathbf{V}$. Viceversa, dato una k-colorazione $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ del grafo Γ, si ottiene un modello $I_f \models T_{V,k}$ ponendo $I_f(X_{ab}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \{a, b\} \in E$, e ponendo $I_f(Y_a^i) = \mathbf{V}$ se e solo se $f(a) = i$.

2. Il Teorema di compattezza semantico

Definizione 2.23. Una teoria T si dice *finitamente soddisfacibile (FS)* se ogni suo sottoinsieme finito $T' \subseteq T$ è soddisfacibile.

Proposizione 2.24. *Sia T una teoria finitamente soddisfacibile. Allora per ogni formula $\mathcal{A}$, $T \cup \{\mathcal{A}\}$ è FS o $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ è FS.*

Dim. Supponiamo per assurdo che T sia FS e che entrambe le teorie $T \cup \{\mathcal{A}\}$ e $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ non siano FS. Allora esistono sottoinsiemi finiti insoddisfacibili

$$\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\} \subseteq T \cup \{\mathcal{A}\} \quad \text{e} \quad \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\} \subseteq T \cup \{\neg\mathcal{A}\}.$$

Visto che T è FS, necessariamente $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\} \not\subseteq T$ e $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\} \not\subseteq T$, e quindi $\mathcal{A} \in \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ e $\neg\mathcal{A} \in \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$. Senza perdita di generalità, supponiamo che $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}_m = \neg\mathcal{A}$. Prendiamo un modello I dell'insieme finito $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{m-1}\} \subseteq T$. Se $\mathcal{A}$ è vera in I, allora $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{B}_n = \mathcal{A}$ sono tutte vere in I, contro l'assunzione di $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ insoddisfacibile; analogamente, se $\mathcal{A}$ è falsa in I, allora $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{m-1}, \mathcal{C}_m = \neg\mathcal{A}$ sono tutte vere in I, contro l'assunzione di $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$ insoddisfacibile. Abbiamo così ottenuto l'assurdo cercato. $\square$

Un risultato fondamentale, che mette in evidenza la natura finitistica del concetto di conseguenza logica, è il seguente:

Teorema 2.25 (Compattezza semantica).
Per ogni teoria proposizionale T valgono le due seguenti proprietà equivalenti:

(1) *Per ogni formula $\mathcal{A}$, $T \models \mathcal{A}$ se e solo se esiste una quantità finita di formule $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in T$ tali che $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \models \mathcal{A}$;*
(2) *Se T è finitamente soddisfacibile allora T è soddisfacibile, cioè se ogni sottoinsieme finito di T ha un modello allora anche T ha un modello.*

Dim. Dimostriamo anzitutto l'equivalenza delle due proprietà.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se T è insoddisfacibile allora, per l'Osservazione 2.8, esiste una formula $\mathcal{A}$ tale che $T \models \mathcal{A}$ e $T \models \neg\mathcal{A}$. Per l'ipotesi, esiste allora una quantità finita di formule $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ in T tali che $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \models \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m \models \neg\mathcal{A}$. Di nuovo per l'Osservazione 2.8, concludiamo che la teoria finita $T_0 = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\} \subseteq T$ è insoddisfacibile perché $T_0 \models \mathcal{A}$ e $T_0 \models \neg\mathcal{A}$, e quindi T non è FS.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in T$, banalmente $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \models \mathcal{A} \Rightarrow T \models \mathcal{A}$. Viceversa, supponiamo che per ogni scelta di $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in T$

sia $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \not\models \mathcal{A}$, cioè che per ogni scelta di $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \in T$ esista un'interpretazione I dove $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ sono vere e $\mathcal{A}$ è falsa. Questo mostra che la teoria $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ è FS e dunque, per l'ipotesi, la teoria $T \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ è soddisfacibile. Per la Proposizione 2.9, concludiamo che $T \not\models \mathcal{A}$.

Mostriamo ora che vale la proprietà (2). Consideriamo la seguente famiglia, parzialmente ordinata per inclusione:

$$\mathcal{T} \;=\; \{S \supseteq T \mid S \text{ finitamente soddisfacibile}\}.$$

Banalmente $\mathcal{T} \neq \emptyset$ perché $T \in \mathcal{T}$ per ipotesi. Data $\langle S_i \mid i \in I\rangle$ una catena crescente in $\mathcal{T}$, consideriamo l'unione $S = \bigcup_{i\in I} S_i$. Se $S' = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subseteq S$ è un suo sottoinsieme finito, per ogni $t = 1, \ldots, n$ prendiamo $i_t \in I$ tale che $\mathcal{A}_t \in S_{i_t}$. Chiaramente $S' \subseteq S_j$ dove $j = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$, e quindi S' ha un modello, visto che S_j è FS. Questo mostra che $S \in \mathcal{T}$ è FS, ed è un elemento maggiorante della catena. Possiamo allora applicare il *Lemma di Zorn*, ed ottenere l'esistenza di un elemento massimale $S_{max} \in \mathcal{T}$. Mostreremo che S_{max} (e quindi T) ha un modello. Ci occorrono le seguenti due proprietà:

(a) $\mathcal{A} \notin S_{max} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \in S_{max}$.

(b) Se $\mathcal{A} \in S_{max}$ e $\mathcal{A} \models \mathcal{A}'$ allora $\mathcal{A}' \in S_{max}$.[4] Di conseguenza, se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$, allora $\mathcal{A} \in S_{max} \Leftrightarrow \mathcal{A}' \in S_{max}$.

(a). Per mostrare l'implicazione $\Rightarrow$, supponiamo per assurdo che esista una formula $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \notin S_{max}$ e $\neg\mathcal{A} \notin S_{max}$. Allora, per la massimalità di S_{max}, entrambe le teorie $S_{max} \cup \{\mathcal{A}\}$ e $S_{max} \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ non sarebbero FS, contraddicendo la Proposizione 2.24. Per l'implicazione inversa $\Leftarrow$, supponiamo per assurdo che esista una formula $\mathcal{A}$ tale che $\neg\mathcal{A} \in S_{max}$ e $\mathcal{A} \in S_{max}$. Allora $\{\neg\mathcal{A}, \mathcal{A}\} \subseteq S_{max}$ sarebbe un sottoinsieme finito di S_{max} insoddisfacibile, una contraddizione.

(b). Dall'ipotesi segue che l'insieme $\{\mathcal{A}, \neg\mathcal{A}'\}$ è insoddisfacibile; infatti in ogni interpretazione dove $\mathcal{A}$ è vera, anche $\mathcal{A}'$ è vera, e quindi $\neg\mathcal{A}'$ è falsa. Ma allora $\{\mathcal{A}, \neg\mathcal{A}'\}$ non è sottoinsieme di S_{max}, che è FS. Visto che $\mathcal{A} \in S_{max}$, concludiamo che $\neg\mathcal{A}' \notin S_{max}$, e quindi $\mathcal{A}' \in S_{max}$ per la (a).

---

[4] Notiamo che questa proprietà è più debole della proprietà: "S_{max} semanticamente chiusa". In realtà, una volta dimostrato questa teorema di compattezza, si potrà concludere che S_{max} è in effetti una teoria semanticamente chiusa perchè è soddisfacibile massimale (cf. Proposizione 2.19). Per il momento però, possiamo solo assumere che S_{max} è *finitamente* soddisfacibile.

Siamo finalmente pronti a costruire un modello di S_{max}, e quindi di T. Lo facciamo prendendo la seguente interpretazione:

$$I(\mathcal{A}) \;=\; \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } \mathcal{A} \in S_{max}\,; \\ \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{A} \notin S_{max}. \end{cases}$$

Dobbiamo verificare verificare che I è effettivamente un'interpretazione, cioè che I soddisfa le seguenti proprietà.

(1) $I(\neg\mathcal{A}) = \mathbf{V}$ se e solo se $I(\mathcal{A}) = \mathbf{F}$;
(2) $I(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \mathbf{V}$ se $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B}) = \mathbf{V}$, e $I(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \mathbf{F}$ altrimenti;
(3) $I(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = \mathbf{F}$ se $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B}) = \mathbf{F}$, e $I(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = \mathbf{V}$ altrimenti;
(4) $I(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = \mathbf{F}$ se $I(\mathcal{A}) = \mathbf{V}$ e $I(\mathcal{B}) = \mathbf{F}$, e $I(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = \mathbf{F}$ altrimenti;
(5) $I(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = \mathbf{V}$ se $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{B})$, e $I(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = \mathbf{F}$ altrimenti.

La (1) segue direttamente dalla proprietà (a) di sopra.

La proprietà (2) equivale a mostrare l'equivalenza $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} \in S_{max} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in S_{max}$ e $\mathcal{B} \in S_{max}$. Visto che $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} \models \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} \models \mathcal{B}$, l'implicazione $\Rightarrow$ segue dalla proprietà (b) di sopra. Viceversa, se per assurdo fosse $\mathcal{A} \in S_{max}$, $\mathcal{B} \in S_{max}$, ma $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} \notin S_{max}$, allora $\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \in S_{max}$ per la (a), ed avremmo l'insieme finito insoddisfacibile $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\} \subseteq S_{max}$, una contraddizione.

Gli altri casi (3), (4), e (5), seguono da (1) e (2) usando le proprietà (a) e (b) di sopra, e le seguenti equivalenze logiche:

(i) $\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \equiv \neg\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$;
(ii) $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \equiv \neg(\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B})$;
(iii) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv \neg(\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}) \wedge \neg(\neg\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$.

A titolo di esempio vediamo la (3); per le altre si procede in modo del tutto simile. $I(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = \mathbf{F} \Leftrightarrow$ (per definizione) $\mathcal{A}\vee\mathcal{B} \notin S_{max} \Leftrightarrow$ (per la (a)) $\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \in S_{max} \Leftrightarrow$ (per la (b) e l'equivalenza (i)) $\neg\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B} \in S_{max} \Leftrightarrow$ (per la (2)) $\neg\mathcal{A} \in S_{max}$ e $\neg\mathcal{B} \in S_{max} \Leftrightarrow$ (per definizione) $I(\neg\mathcal{A}) = \mathbf{V}$ e $I(\neg\mathcal{B}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow$ (per la (1)) $I(\mathcal{A}) = \mathbf{F}$ e $I(\mathcal{B}) = \mathbf{F}$. □

Il Teorema di compattezza è molto utile nelle applicazioni perché permette di dimostrare proprietà generali a partire dai soli casi finiti. Vediamo alcuni esempi.

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Ricordiamo che due elementi $a, b \in P$ si dicono *confrontabili* se $a \leq b$ o $b \leq a$; altrimenti, si dicono *inconfrontabili*. Una *catena* di P è un sottoinsieme $C \subseteq P$ le cui coppie sono tutte confrontabili. Un'*anticatena* è un sottoinsieme $C \subseteq P$ le cui coppie di elementi distinti sono tutte inconfrontabili.

TEOREMA 2.26. *Ogni ordinamento parziale si può estendere ad un ordinamento totale; cioè, per ogni insieme parzialmente ordinato* $(A, <)$ *esiste un ordinamento totale* $(A, \prec)$ *tale che* $a < b \Rightarrow a \prec b$.

DIM. Dimostriamo prima il caso finito:

- *L'enunciato del teorema è vero se A è un insieme finito.*

Procediamo per induzione sulla cardinalità $n = |A|$. La base $n = 1$ è banale. Se $|A| = n + 1$, fissiamo un elemento $a^* \in A$ massimale, cioè tale che non esistono elementi $b > a^*$. Notiamo infatti se non esistessero elementi massimali si avrebbero catene $a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ e quindi A sarebbe infinito. Per l'ipotesi induttiva su $B = A \setminus \{a^*\}$ esiste un ordine totale $(B, \prec)$ dove $\prec$ estende $<$. Finalmente definiamo l'ordinamento $\prec'$ su A ponendo:

- $b \prec' a^*$ per ogni $b \in B$;
- $b \prec' c$ per ogni $b, c \in B$ tali che $b \prec c$.

È facile verificare che $(A, \prec')$ è un ordine totale che estende $(A, <)$.

Occupiamoci ora del caso generale usando gli strumenti del calcolo proposizionale. Sia $\mathcal{L}_A = \{X_{ab} \mid a, b \in A\}$ il linguaggio contenente una variabile per ogni coppia ordinata di elementi di A, e sia T^A_{ord} la $\mathcal{L}_A$-teoria definita come nell'Esempio 2.20. La tesi equivale a trovare un modello $I \models T^A_{\text{ord}}$.

Per il teorema di *compattezza*, trovare un modello di T^A_{ord} equivale a trovare un modello per ogni suo sottoinsieme finito $T_0 \subset T^A_{\text{ord}}$. Sia

$$A_0 := \bigcup \{\{a, b\} \mid X_{ab} \text{ compare in una formula } \mathcal{A} \in S\}.$$

Visto che T_0 è finito, e visto che in ogni formula compaiono solo un numero finito di variabili X_{ab}, anche A_0 è finito. Denotiamo con $(A_0, <)$ la restrizione dell'ordine parziale $(A, <)$ al sottoinsieme finito A_0. È facile vedere che T_0 è incluso in $T^{A_0}_{\text{ord}}$.

Per quanto visto sopra, esiste un ordine totale $(A_0, \prec)$ che estende $(A_0, <)$. Prendiamo una qualunque interpretazione I_0 tale che, per ogni $a, b \in A_0$,

$$I(X_{ab}) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } a \prec b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si verifica direttamente che $I_0 \models T^{A_0}_{\text{ord}}$, e quindi $I_0 \models T_0$. □

ESERCIZIO 2.27. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $k \in \mathbb{N}$. Usando il Teorema di compattezza, dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di P è unione di k catene, allora anche P è unione di k catene.

Ricordiamo il seguente risultato combinatorio:

- *Teorema di Dilworth.* Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. P è l'unione di k catene se e solo se ogni anticatena ha cardinalità $\leq k$.

Esercizio 2.28.* Usando il Teorema di compattezza, dimostrare che il Teorema di Dilworth segue dalla sua validità per i soli insiemi parzialmente ordinati *finiti*.

Il *rango* di un insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$ è il più piccolo numero n di ordini totali $\leq_1, \ldots, \leq_n$ su A la cui intersezione è $\leq$, cioè $a \leq b$ se e solo se $a \leq_i b$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 2.29.* Usando il Teorema di compattezza, dimostrare che l'insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$ ha rango $\leq n$ se e solo se per ogni sottoinsieme finito $B \subseteq A$ la restrizione $(B, \leq\restriction_B)$ ha rango $\leq n$.

Ricordiamo che un grafo $\langle V', L' \rangle$ si dice *sottografo* del grafo $\langle V, L \rangle$ se $V' \subseteq V$ e $L' \subseteq \{\{a, b\} \in L \mid a, b \in V'\}$.

Esercizio 2.30. Usando il Teorema di compattezza, dimostrare che un grafo è k-colorabile se e solo se ogni suo sottografo finito è k-colorabile.[5]

Ricordiamo che il *numero cromatico* di un grafo è il più piccolo numero k tale che il grafo è k-colorabile.

Esercizio 2.31.* Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione tale che $f(n) \neq n$ per ogni n e sia (V, L) il grafo avente come insieme di vertici $V = \mathbb{N}$ e dove l'insieme dei lati è $L = \{\{n, f(n)\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Usando il Teorema di compattezza dimostrare che il numero cromatico di (V, L) è 3.

Ricordiamo che un grafo $\langle V, L \rangle$ si dice *connesso* se ogni coppia di vertici distinti è collegata da un "percorso" sui lati, cioè se per ogni $a, b \in V$ con $a \neq b$ esiste una sequenza finita $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ dove $x_1 = a$ e $x_n = b$, e tale che $\{x_i, x_{i+1}\} \in L$ per ogni $1 \leq i < n$.

Ricordiamo che un gruppo $(G, \cdot)$ è *ordinabile* se esiste un ordinamento totale $<$ su G tale che, per ogni $a, b, c \in G$:

- Se $a < b$ allora $a \cdot c < b \cdot c$ e $c \cdot a < c \cdot b$.

Ricordiamo inoltre che G si dice *privo di torsione* se per ogni $x \neq e$ diverso dall'elemento neutro, si ha che $x^n \neq e$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[5] I grafi k-colorabili sono stati definiti sopra l'Esempio 2.22.

Esercizio 2.32.*

(1) Usando il Teorema di compattezza, dimostrare che un gruppo G è ordinabile se e solo se tutti i suoi sottogruppi finitamente generati sono ordinabili.
(2) Usando la proprietà di sopra, dimostrare che un gruppo commutativo è ordinabile se e solo se è privo di torsione.

Ricordiamo il seguente risultato combinatorio:

- *Teorema di Schur.* In ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una tripla $\{a, b, a+b\}$ monocromatica; cioè, per ogni colorazione finita $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste un colore C_i ed esistono $a \neq b$ tali che $a, b, a+b \in C_i$.

Esercizio 2.33.* Usando il Teorema di compattezza dimostrare la seguente versione finita del Teorema di Schur:

- Per ogni r esiste N con la proprietà che in ogni r-colorazione $\{1, \ldots, N\} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste un colore C_i ed esistono $a \neq b$ tali che $a, b, a+b \in C_i$.

Ricordiamo il seguente importantissimo risultato combinatorio, che considereremo di nuovo più avanti nel corso.

- *Teorema di Ramsey infinito (per coppie).* In ogni colorazione finita $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ delle coppie di numeri naturali esiste un insieme infinito H omogeneo, cioè tale che le sue coppie $[H]^2 \subseteq C_i$ sono monocromatiche.[6]

Una versione più debole è la seguente:

- *Teorema di Ramsey infinito (per coppie) – versione debole.* Per ogni colorazione finita $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste un colore C_i ed insiemi finiti H arbitrariamente grandi tali che $[H]^2 \subseteq C_i$.

Esercizio 2.34.* Usando anche il Teorema di compattezza, dimostrare l'equivalenza tra la versione debole del Teorema di Ramsey infinito, e la seguente versione finita:

[6] Per 2-colorazioni, una formulazione equivalente del Teorema di Ramsey in termini di grafi è la seguente: "Ogni grafo infinito ha un sottografo indotto infinito che è *completo* (cioè tutte le coppie di suoi vertici formano un lato) oppure che è un'*anticatena* (cioè nessuna coppia di suoi vertici forma un lato)". Ricordiamo che un *sottografo indotto* di un grafo $\Gamma = \langle V, E\rangle$ è un sottografo $\Gamma' = \langle V', E'\rangle$ dove $V' \subseteq V$ e $E' = \{\{a, b\} \in E \mid a, b \in V\}$ contiene tutti i lati del grafo Γ che hanno vertici in V'.

- *Teorema di Ramsey finito (per coppie).* Per ogni r e per ogni m, esiste N tale che per ogni r-colorazione $[\{1, \ldots, N\}]^2 = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste un insieme omogeneo H di cardinalità m.

Esercizio 2.35.* Senza usare alcuna forma dell'assioma di scelta, dimostrare l'equivalenza delle seguenti proprietà:

(1) Teorema semantico di compattezza (Teorema 2.25);
(2) Tutti i prodotti topologici $\{0, 1\}^Y$ sono compatti.[7]

[7] Quando $Y = \mathbb{N}$, il prodotto infinito $\{0, 1\}^Y$ è noto come *spazio di Cantor*.