11/12/18

1) Due matrici simili hanno lo stesso determinante.

) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Def. A e B sono $\boxed{\text{SIMILI}}$ se esiste S invertibile t.c. $S^{-1} A \cdot S = B$

→ Corrispondono alla stessa A.L. (cambiando base)

DIM:

$\underline{\det(B)} = \det(S^{-1}AS) \overset{\text{BINET}}{=} \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) =$

$= \det(S^{-1}) \cdot \det(S) \cdot \det(A) = \det(S^{-1} S) \cdot \det(A) = \det(I) \cdot \det(A) =$

$= 1 \cdot \det(A) = \underline{\det(A)}$

DIM:

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \overbrace{\det(S^{-1}) \cdot \det(S)}^{=1} \cdot \det(B - \lambda I) =$$

$$= \det(S^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(S) \overset{\text{BINET}}{=} \det(S^{-1}(B - \lambda I) S)$$

Ma $S^{-1}(B - \lambda I) S = (S^{-1}B - \lambda \underbrace{S^{-1} I}_{= S^{-1}}) S = (S^{-1} B - \lambda S^{-1}) S =$

$$= S^{-1} B S - \lambda S^{-1} S = S^{-1} B S - \lambda I = A - \lambda I$$

$$\Rightarrow P_B(\lambda) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$$

quindi A e B matrici simili hanno gli stessi AUTOVALORI (= radici del polinomio caratteristico).

TEOREMA: La molteplicità algebrica di un autovalore è ≥ della sua molteplicità geometrica.

m.a. dell'autovalore a è l'esponente k t.c. $P_A(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot Q(\lambda)$ dove $Q(a) \neq 0$.

esempio: $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2$

$\lambda = 1$ autovalore di m.a. 2

$\lambda = 0$ " " m.a. 1

m.g. è la dimensione dell'AUTOSPAZIO $\ker(A - aI)$ (n° di vettori della base) m.a. $\geq$ m.g.

TEOREMA $A_{n \times n}$ è DIAGONALIZZABILE (cioè esiste S t.c. $S^{-1}AS$ è diagonale) $\Longleftrightarrow$ esiste una base $\mathcal{B}$ di autovettori $\Longleftrightarrow$ tutte le radici del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ sono REALI e m.a. = m.g. per ogni autovalore.

esercizio: K parametro _ A è diagonalizzabile?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ K-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ K-1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (K-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ K-1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (K-\lambda)(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (K-\lambda)(3-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 0\right] = (K-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

autovalori: $\lambda = K$

$\downarrow$ $\lambda = 3$

3/4 AUTOVALORI REALI $\lambda = 2$

$\lambda = 1$

$\downarrow$

DISCUSSIONE:

- caso 1. $K \neq 1$, $K \neq 2$, $K \neq 3 \Rightarrow$ 4 autovalori distinti, tutti con m.a. = 1 A DIAGONALIZZABILE PERCHÉ TROVO UNA BASE CON 4 VETTORI CHE SONO AUTOVETTORI.
- caso 2 $K = 1$ $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

$\downarrow$ m.a. 2 $\quad$ $\downarrow$ m.a. 1 $\quad$ $\downarrow$ m.a. 1

A è DIAGONALIZZABILE $\Longleftrightarrow$ m.g. dell'autovalore 1 è 2

Ker $(A - 1I)$ deve avere dimensione 2

AUTO SPAZIO DI $\lambda = 1$

$$A_{k=1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{2}I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - 2II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{scambio } III \text{ e } IV} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad$ P P P L

m.g. = 1 (una sola variabile libera)

con $k=1$ A non e' DIAGONALIZZABILE.

RICORDA: n° colonne pivot = $\dim Im_{f_A}$
n° variabili libere = $\dim(Ker f_A)$

caso 3 $\quad k=2$

$\lambda = 1$ m.a. 1

$\lambda = 2$ m.a. 2

$\lambda = 3$ m.a. 1

$$A_{k=2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4 incognite
2 equazioni
⇒ avrò 2 v.l.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } III \text{ e } IV} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III + I]{II - I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \text{ e } III]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad$ P P L L

A e' DIAGONALIZZABILE $\quad$ m.g. = 2 (2 variabili libere)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x_2 + 4 \cdot 1 - 0 = 0 \to x_2 = -2 \\ x_1 + 1 = 0 \to x_1 = -1 \end{cases}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3=0$
$x_4=1$

$$\begin{cases} 2x_2+4\cdot 0-1=0 \longrightarrow x_2=\frac{1}{2} \\ x_1+0=0 \longrightarrow x_1=0 \end{cases}$$

$$\vec{V_2}=\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Verifica :

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}3&0&1&0\\1&2&1&0\\0&0&2&0\\-1&2&3&1\end{pmatrix}}^{A_{k=2}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\0\end{pmatrix}}_{A\ \cdot\ \vec{V_1}\ =\ 2\vec{V_1}}$$

VERO! $\vec{V_1}$ e' "andato" in 2 volte se stesso

CALCOLO GLI AUTOVETTORI PER $\lambda=1$ E PER $\lambda=3$

$$A-1I=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\-1&2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[IV+\frac{1}{2}I]{II-\frac{1}{2}I}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&1/2&0\\0&0&1&0\\0&2&7/2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{IV-2II}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&1/2&0\\0&0&1&0\\0&0&5/2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-\frac{5}{2}III}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&1/2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P&P&P&L\end{matrix}\end{array}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_3=0\\ x_2+\frac{1}{2}x_3=0\\ x_3=0\end{cases}\qquad x_4=1\qquad \vec{V_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

NON E' INVERTIBILE POICHE' 1ª eq. ≡ 3ª eq.
QUINDI HO 3 EQ. E 4 INCOGNITE

$$A-3I=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&-1&0\\-1&2&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{SCAMBIO } II \text{ e } I}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\-1&2&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{IV+I}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&1&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{SCAMBIO } IV \text{ e } II}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&4&-2\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{IV+III}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&4&-2\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P&P&P&L\end{matrix}\end{array}$$

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+4x_3-2x_4=0\\ -x_3=0\end{cases}\qquad \begin{matrix}x_4=1\\x_3=0\\x_2=2\\x_1=2\end{matrix}\qquad \vec{V_4}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

BASE di AUTOVETTORI $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda=2 \quad \lambda=2 \quad \lambda=1 \quad \lambda=3$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(S^{-1}AS) = 12$$

$\det(A) = 12$

caso 4 $\quad K = 3$

$\lambda = 1 \quad m.a. = 1$

$\lambda = 2 \quad m.a. = 1$

$\lambda = 3 \quad m.a. = 2$

$$A_{K=3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{SCAMBIO III e IV}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{1}{2}\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III e II}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

$m.g. = 1$ (1 variabile libera) $\Rightarrow$ A <u>non</u> è DIAGONALIZZABILE

<u>TRASPOSTA</u> di una matrice :

"scambiare righe con colonne"

posizione 1,3

$$\underset{3\times2}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times3}{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

osizione 3,1

$$\underset{3\times2}{A} \cdot \underset{2\times3}{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 25 & -15 \\ -10 & -15 & +25 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 25 & -15 \\ -10 & -15 & 25 \end{pmatrix} = B$$

<u>Def.</u> se $B^T = B$ la matrice B si dice SIMMETRICA (<u>N.B.</u> B è quadrata)

<u>Def.</u> $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ $\quad {}^TA = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$ dove $a_{ji} = a_{ij}$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ simmetrica quando $a_{ij} = a_{ji}$

PROPRIETÀ IMPORTANTE

RICORDA $\rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

DIM.

$\underset{m \times n}{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ $\quad \underset{n \times h}{B} = (b_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,h}}$

$\underset{m \times h}{A \cdot B} = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,h}}$ dove $c_{ik} =$ "prodotto tra la i-esima riga di A con la k-esima riga di B" =

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

esempio:

$$\underset{4 \times 3}{\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 5}{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & c_{3,2} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$c_{3,2} = (\underset{a_{3,1}}{-2}\ \underset{a_{3,2}}{5}\ \underset{a_{3,3}}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \end{matrix} = \underbrace{(-2)(5)}_{a_{3,1} \cdot b_{1,2}} + \underbrace{(5)(0)}_{a_{3,2} \cdot b_{2,2}} + \underbrace{(4)(3)}_{a_{3,3} \cdot b_{3,2}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{3j} \cdot b_{j2}$$

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}} \quad \text{dove } a_{ji} = a_{ij}$$

$$B^T = (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,h \\ j=1,\dots,m}} \quad \text{dove } b_{kj} = b_{jk}$$

$$\underset{h\times m}{B^T} \cdot \underset{m\times n}{A^T} = \underset{h\times n}{(d_{ki})}_{\substack{k=1,\dots,h \\ i=1,\dots,n}} \quad \text{dove } d_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \cdot a_{ji} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_{jk} \, a_{ij} = c_{ik}$$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 25 & -15 \\ -10 & -15 & 25 \end{pmatrix}}_{B}$$

- $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ Quindi $A \cdot A^T$ e' SIMMETRICA!

Vedremo che $\det(A^T) = \det(A)$
Le matrici simmetriche (quelle t.c. $A^T = A$) hanno proprieta' MOLTO speciali.

13/12/18

PERPENDICOLARITA'

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Angolo formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$? $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = -2 - 5 + 5 = -2$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = -\frac{2}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{27}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{27}}\right)$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\vec{v}\cdot\vec{w} > 0 \iff \theta$ acuto

$\vec{v}\cdot\vec{w} < 0 \iff \theta$ ottuso

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ $\quad \cos 90° = 0$

Notazione $\quad \vec{v}|\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w}$

PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE:

1) $(\vec{v}|\vec{w}) = (\vec{w}|\vec{v}) \rightarrow$ il prodotto scalare è commutativo

2) $(\lambda\vec{v}|\vec{w})$

esempio: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$3\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{v}|\vec{w}) = -2$ $\quad (3\vec{v}|\vec{w}) = -6$

3) $(v_1+v_2|w) =$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$= (v_1|w) + (v_2|w)$

$(v_1|w) = a_1c_1 + \dots + a_nc_n$

$(v_2|w) = b_1c_1 + \dots + b_nc_n$

$(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow (v_1+v_2|w) = (a_1+b_1)c_1 + \dots + (a_n+b_n)c_n$

4) $(\vec{v}|\lambda\vec{w}) = \lambda(\vec{v}|\vec{w})$

5) $(\vec{v}|w_1+w_2) = (v|w_1) + (v|w_2)$

Se v e v' sono ⊥ a w allora anche v+v'
e' ⊥ a w.

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\+1\end{pmatrix} \qquad v \perp w$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (v+v') \perp w$$

$$\vec{v}|\vec{w}=0$$

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix}0\\4\\+4\end{pmatrix} \qquad \vec{v}'|\vec{w}=0 \qquad v' \perp w$$

$$\vec{z}=\vec{v}+\vec{v}'=\begin{pmatrix}-1\\7\\8\end{pmatrix} \qquad \vec{z}|\vec{w}=0 \Rightarrow (v+v') \perp w$$

→ per la proprietà 3 del prodotto scalare

$$(v+v'|w) = \underbrace{(v|w)}_{=0} + \underbrace{(v'|w)}_{=0} = 0$$

SI

Se $v \perp w$ allora $5v \perp w$

$$(v|w)=0 \overset{?}{\Rightarrow} (5 \cdot v|w)=0$$

SI

$$5(v|w)=0$$

PROPRIETÀ: se $v_1, \dots, v_n$ sono a due a due perpendicolari, allora sono LINEARMENTE INDIPENDENTI (ma non viceversa)

DIM (con $n=3$)

Supponiamo $v_1, v_2, v_3 \neq 0$ siano a due a due ⊥, cioè $(v_1|v_2)=0$, $(v_2|v_3)=0$, $(v_1|v_3)=0$.

Vogliamo dimostrare che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente) indipendenti.

$$0=(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 | \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3) =$$

$\overset{③}{=} (\lambda_1 v_1 | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) +$

$+ (\lambda_2 v_2 | \quad " \quad) +$

$+ (\lambda_3 v_3 | \quad " \quad) \overset{②}{=} \boxed{\lambda_1 (v_1 | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)} +$

$+ \boxed{\lambda_2 (v_2 | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)} +$

$+ \boxed{\lambda_3 (v_3 | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)} \overset{⑤}{=}$

$$\lambda_1 [(v_1|\lambda_1 v_1) + (v_1|\lambda_2 v_2) + (v_1|\lambda_3 v_3)] \overset{④}{=} \lambda_1 [\lambda_1 (v_1|v_1) + \lambda_2 \underbrace{\cancel{(v_1|v_2)}}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{\cancel{(v_1|v_3)}}_{=0}] =$$

poiché $v_1 \perp v_2$ e $v_1 \perp v_3$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = |v|^2$

$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 1 + 9 + 16 = 26 = |v|^2$ → da ricordare

$$= \boxed{\lambda_1^2 |v_1|^2} + \boxed{\lambda_2^2 |v_2|^2} + \boxed{\lambda_3^2 |v_3|^2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sono indipendenti ⇒ formano una base

PROCESSO DI ORTOGONALIZZAZIONE (Gram-Schmidt)

ci fa trovare una base fatta tutta di vettori $\perp$

DIM. CON UN ESEMPIO:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } \mathbb{R}^3 ?$$

– verifico che è una base di $\mathbb{R}^3$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{è invertibile}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{matrix} \,\vdots\, \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix} \right) = 0 + 0 + 6 - (+\cancel{6} - \cancel{6} + 0) = 6 \neq 0$$

⇓

B è una base di $\mathbb{R}^3$

$(v_1|v_2) = 2 \quad (\Rightarrow \theta \text{ acuto}) \qquad v_1 \not\perp v_2$

$$\boxed{v_2' = v_2 - \frac{(v_1|v_2)}{|v_1|^2} \cdot v_1} \quad \text{Allora } (v_1 | v_2') = 0$$

$v_2' = v_2 - \lambda v_1 \qquad (v_1|v_2') = (v_1|v_2 - \lambda v_1) = (v_1|v_2) - \lambda(v_1|v_1) =$

$= (v_1|v_2) - \lambda |v_1|^2 = 0 \iff \lambda = \dfrac{(v_1|v_2)}{|v_1|^2}$

$|v_1|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$

$$\lambda = \frac{(v_1|v_2)}{|v_1|^2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$v_1 | v_2' = 1 \cdot 1 + (-1)(1) + 0 \cdot -2 = 0 \Rightarrow \underline{v_1 \perp v_2'}$

FORMULA

$$\boxed{v_3' = v_3 - \lambda v_2' - \mu v_1}$$

$$\lambda = \frac{(v_3|v_2')}{|v_2'|^2} \qquad \mu = \frac{(v_3|v_1)}{|v_1|^2} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{-6}{6} = -1 \qquad \mu = \frac{6}{2} = 3$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_2'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3'} \right\} \rightarrow \text{BASE ORTOGONALE}$$

infatti

$(v_1|v_2') = 0, \; (v_2'|v_3') = 0, \; (v_1|v_3') = 0$

$\rightarrow$ matrice corrispondente alla base ortogonale

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$

(base ortogonale)

MATRICE DIAGONALE

$$S^T \cdot S$$

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S^T} \cdot \underbrace{\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$|V_1|^2$, $|V_2|^2$, $= |V_3|^2$

$(V_1|V_3) = 0$ poiché $V_1 \perp V_3$

- base ortonormale = base ortogonale, fatta di vettori di lunghezza unitaria 1.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rimane } \perp \text{ sia a } V_2 \text{ che a } V_3$$

$$|w_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |V_2| = \sqrt{6}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad |w_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{6} + \frac{4}{6}} = 1$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |V_3| = \sqrt{3}$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad |w_3| = 1$$

BASE ORTONORMALE $\quad \tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \Theta^T \cdot \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Theta =$ MATRICE CHE CORRISPONDE A UNA BASE ORTONORMALE

Le matrici O che corrispondono a basi ORTONORMALI hanno la proprietà che $O^T \cdot O = I$, quindi $O^{-1} = O^T$

def. Una O t.c. $O^T = O^{-1}$ si chiama MATRICE ORTOGONALE (cioè ORTONORMALE).

Esercizi

Se A e B sono matrici ortogonali allora anche $A \cdot B$ è ortogonale? VERO

Per def. sappiamo che $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$

chiediamo se è vero o no che $(A \cdot B)^T \stackrel{?}{=} (A \cdot B)^{-1}$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow (AB)^T = (AB)^{-1}$

Se A e B sono simmetriche, allora anche $A \cdot B$ è simmetrica? FALSO

Per def. sappiamo che $A^T = A$ e $B^T = B$

chiediamo se è vero o no che $(AB)^T \stackrel{?}{=} AB$

$(AB)^T = B^T A^T = B \cdot A$ $\qquad AB \neq BA$

8/11/2018 TEST $\longrightarrow$ RICORDA !!!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{2x3}$ $\qquad f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Trova B inv. dx che ha tutti zeri nella II riga.

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ NON INIETTIVA (se faccio la riduz. di A vengono delle colonne libere, quindi sol. speciali $\Rightarrow$ il nucleo non è zero)

$\boxed{N.B.}$ se ho una A.L. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $n < m$ allora f NON e' iniettiva. Infatti la matrice corrispondente $A_{n \times m}$ ha più colonne che righe, quindi nella riduzione si trovano variabili libere, quindi esistono sol. speciali che formeranno una base del nucleo, quindi $\operatorname{Ker} A \neq \{0\} \iff f$ NON e' iniettiva.

Gauss-Jordan → SOLO PER MATRICI QUADRATE

Notiamo che $B_{3\times 2}$ poiché $A_{2\times 3}$ $\quad \underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = I_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - 2c = 1 \\ b - 2d = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \to \quad a = 2c+1 \quad -(2c+1) + 3c = 0 \quad -2c - 1 + 3c = 0$$

$c = 1 \quad a = 3$

$b = 2d \quad b = 3d - 1 \quad 2d = 3d - 1 \quad d = 1 \quad b = 2$

vedi bene prodotto

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

4) $V = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \perp \underset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}} \right\}$ e' un sottospazio?

SPAN DI UN PO' DI VETTORI

OPPURE (1) $\vec{v} \in V \Rightarrow \lambda \vec{v} \in V$

(2) $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V \Rightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \iff v \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(v \mid v_1) = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & 1 \\ x_2 & -2 \\ x_3 & 5 \end{array} \right) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \right\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xmapsto{f} x_1 - 2x_2 + 5x_3$ e' un' A.L.

$V = \ker f$

vettori che vanno in zero $\Rightarrow V = \ker f =$ nucleo,
noi sappiamo che $\ker f$ e' un sottospazio $\Rightarrow$ V e'
un sottospazio.

$\underset{1\times 3}{A} =$ matrice di $f = \begin{array}{ccc} (1 & -2 & 5) \\ P & L & L \end{array}$

$\{ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = 0$

$x_1 - 2 = 0$

$x_1 = 2$

$\vec{S_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

$x_1 + 5 = 0 \quad x_1 = -5$

$\vec{S_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$ base di V

ha 2 elementi $\Rightarrow$ V ha dimensione 2

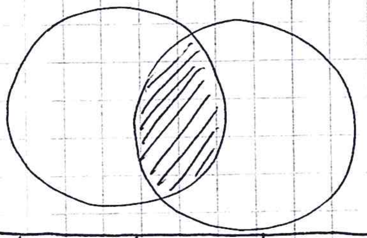
colonne pivot = dimensione immagine.

variabili libere = " nucleo f.

PROPRIETA'

17/12/18

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ → se A e B sono disgiunti



→ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

N.B. $V+W$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, quindi $\dim(V+W) \le n$

- $\boxed{\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)}$

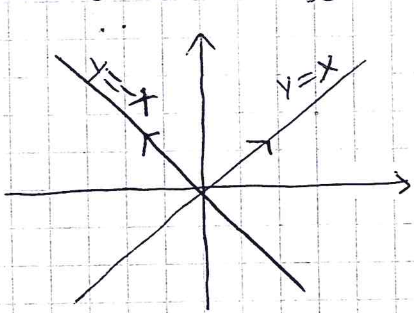
$V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazi

$V \cap W$ sottospazio

$\underline{V \cup W}$ NON è un sottospazio

N.B. L'unione di 2 sottospazi non è un sottospazio

esempio:



$\mathbb{R}^2$ $\quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = x \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = -x \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$V \cup W$ <u>non</u> è un sottospazio

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \cup W$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V \cup W$, $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V \cup W$

$V+W = \{ v+w \mid v \in V \text{ e } w \in W \}$ il più piccolo sottospazio che include sia V che W

1) $V+W$ è un sottospazio?

- $v+w \in V+W \Rightarrow \lambda(v+w) = \underbrace{\lambda v}_{\in V} + \underbrace{\lambda w}_{\in W} \in$
$\in V+W$

- $v_1+w_1, v_2+w_2 \in V+W \Rightarrow$
$\Rightarrow (v_1+w_1)+(v_2+w_2) = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W} \in$
$\in V+W$

(e) $e^{2z} - e^{\bar{z}+3} = 0$

$$e^{2z} = e^{\bar{z}+3}$$

$$e^{2(a+ib)} = e^{(a-ib)+3} \qquad e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

$$e^{2a+2ib} = e^{a+3-ib}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\rho = e^{2a} \qquad \rho = e^{a+3}$$

$$\theta = 2b \qquad \theta = -b$$

$$(e^{2a}, 2b) \qquad (e^{a+3}, -b)$$

$$\begin{cases} e^{2a} = e^{a+3} & \longrightarrow \quad 2a = a+3 \longrightarrow a = 3 \\ 2b = -b + 2k\pi & \qquad b = \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

$$z = 3 + ik\frac{2\pi}{3}$$

) inv. sinistra di $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\underset{2\times3}{B} \cdot \underset{3\times2}{A} = \underset{2\times2}{I} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b=0 \quad e=0$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a - 2c = 0 \qquad 3 - 2c = 0 \qquad 2c = 3 \qquad c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \\ 3d - 2f = 1 \qquad -1 = 2f \qquad f = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA – Esercitazione scritta
17/12/2018

Determinare il valore di verità (VERO o FALSO) delle seguenti affermazioni:

1) Se A e B sono simmetriche, allora AB è simmetrica

2) Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^7$ sottospazi di dimensione 5. Allora $\dim(V \cap W) \geq 3$

3) Se A e B sono ortogonali, allora $A \cdot B$ è ortogonale

4) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono autovettori di una matrice A, allora anche $\vec{v}+\vec{w}$ è autovettore di A

5) Se 0 <u>non</u> è un autovalore della matrice quadrata A, allora A è invertibile.

6) Se due matrici hanno gli stessi autovalori, allora le matrici sono simili.

7) Se due matrici sono simili allora hanno lo stesso determinante.

8) Se A è diagonalizzabile allora A è invertibile

9) Se $v_1 \perp w_1$ e $v_2 \perp w_2$ allora $v_1+v_2 \perp w_1+w_2$

10) Se λ è autovalore di A, allora λ^2 è autovalore di $A \cdot A$.

a) Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{2z} - e^{\bar{z}+3} = 0$$

b) Trovare l'inversa sinistra di $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ che ha tutti zeri nella seconda colonna.

c) Sia $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dove

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5,\ x_3 + 4x_4 - 3x_5,\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5)$$

- Trovare una base di $\operatorname{Im} T$ e una base di $\ker T$
- Trovare tutti gli elementi dell'insieme $\mathcal{Y} = \{\vec{x} = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid T(\vec{x}) = (2, 1, 3)\}$

d) Sia $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'appl. lineare dove

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3,\ 5x_1 + x_2 + 5x_3,\ x_3,\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4)$$

- Determinare autovalori di T e basi per ognuno dei sottospazi.
- Stabilire se T e' diagonalizzabile, e in caso affermativo trovare la matrice "cambio di base".

e) Trovare una base del sottospazio

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

f) Diagonalizzare la seguente matrice nel campo complesso:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Trovare un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\ker T = \operatorname{Im} T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$$

SPAZIO VETTORIALE 18/12/18

$\mathbb{R}^n$ //

Insieme V di oggetti chiamati vettori che soddisfano la seguente lista di proprietà:

1) È definita un'operazione di somma tra vettori che è COMMUTATIVA e ASSOCIATIVA, cioè $V_1+V_2=V_2+V_1$ e $V_1+(V_2+V_3)=(V_1+V_2)+$

2) È definita un'operazione "prodotto per scalare" che associa ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) e ad ogni vettore $v \in V$ associa un vettore $\lambda \cdot v \in V$.

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ $V_1, V_2 \in V$ $\lambda(V_1+V_2) = \lambda V_1 + \lambda V_2$ (proprietà distributiva)

4) $(\lambda_1+\lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (")

esempi

1) spazi $\mathbb{R}^n$

2) $V = \{$polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ i polinomi sono uno spazio vettoriale

↓

esempio:

Prendiamo $V_3 = \{$polinomi di grado $\leq 3\}$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

$$P(x)+Q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3$$

$$P \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$P+Q = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3$$

$$\lambda P \rightsquigarrow \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

In un senso preciso, V_3 e $\mathbb{R}^4$ sono isomorfi, $V_3 \cong \mathbb{R}^4$

Base di V_3?

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3 = 1$$ — polinomio di grado 0

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3 = x$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0+0\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3 = x^2$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0+0\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3 = x^3$$

$\mathcal{B} = \left\{ \underset{P_1}{1}, \underset{P_2}{x}, \underset{P_3}{x^2}, \underset{P_4}{x^3} \right\} \longrightarrow$ se è una base significa che questi polinomi generano tutti i polinomi di grado ≤ 3.

$\downarrow$

devo verificare:

1) genera tutto V:

esempio $\quad 3+4x-5x^3 = 3P_1+4P_2-5P_4$ è combinazione lineare di vettori della base.

2) i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 = 0 \nearrow$$

esercizio

$\mathcal{B} = \{\underbrace{1+x}_{v_1}, \underbrace{x^2+2x^3}_{v_2}, \underbrace{3x^2+x^3}_{v_3}, \underbrace{4x^3}_{v_4}\}$ è una base di V_3?

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\1\end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$?

Ricordo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base di $\mathbb{R}^n$

$\iff \det\underbrace{(v_1 | \dots | v_n)}_{\text{matrice quadrata invertibile}} \neq 0$

Nel nostro caso

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&2&1&4\end{pmatrix} = 0$$ poiché la 1ª e la 2ª riga sono uguali

(anche se avesse avuto 2 colonne uguali)

$\Downarrow$

$\mathcal{B}$ non è una base

Se al posto di v_2 prendevo $v_2 = x + x^2 + 2x^3$ ottenevo una base (verifica per esercizio).

Lo spazio vettoriale di TUTTI i polinomi $\mathbb{R}[x]$ ha come base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ quindi ha dimensione INFINITA.

esempio

$V = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\right\} = M_{2,2}$ MATRICI 2X2 è uno spazio vettoriale

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Analogamente a V_3 anche $M_{2\times2}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^4$, più in generale, $M_{n\times m}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n\cdot m}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times3} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^6}$$

Base di $M_{2\times2}$ è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICI SIMMETRICHE: proprietà

(matrici uguali alle proprie trasposte)

- $\det(A) = \det(A^T)$ (matrici $n\times n$)

Supponiamo A invertibile, cioè con n-pivot

- $\underbrace{E_k \cdots E_1}_{\text{matrici "mosse di Gauss"}} \cdot A = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & \cdots \\ & d_2 & \cdots \\ 0 & & d_3 \; \cdots \\ & & & d_4 \end{pmatrix} = T$ matrice triangolare superiore

$(E_k \cdots E_1 A)^T = (T)^T$

- $A^T E_1^T \cdots E_k^T = (T)^T =$ matrice triangolare inferiore $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ \cdots & d_2 & \\ \cdots & \cdots & d_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & d_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\det(T) = \det(T^T) = d_1 \cdots d_n$

Ricordare che:

Se T e' una matrice triangolare superiore (o inferiore) il suo det e' il prodotto degli elementi sulla diagonale.

$$\det(E_k \cdots E_1 A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(A) = \det(T)$$
$$\det(A^T E_1^T \cdots E_k^T) = \det(A^T) \cdot \det(E_1^T) \cdots \det(E_k^T) = \det(T^T)$$

Se E e' la matrice di una mossa di Gauss, e' facile vedere che $\det(E) = \det(E^T)$

esempio:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det E = 1$$ (E e' una matrice triangolare).

$II - \lambda I$

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det E^T = 1$$

esempio:

non triangolare

scambio II e III riga $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E^T = E$

scambio I e II riga $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

scambio I e III riga $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sono simm

Conclusione $\det(A) = \det(A^T)$

[C.V.D.]

PROPRIETA' MATRICI SIMMETRICHE

① A simmetrica ⇒ tutti i suoi autovalori sono reali

RICORDA CHE:

$A_{n\times n}$ e' diagonalizzabile ⇔ ha n autovalori reali (contati con la molteplicita') $\boxed{\text{e m.a. = m.g.}}$ per ogni autovalore

① non ci dice che A e' sicuramente diagonalizzabile.

② A simmetrica allora autovettori relativi ad autovalori diversi sono PERPENDICOLARI

③ TEOREMA SPETTRALE: A simmetrica allora A diagonalizzabile.

N.B. ③ ⇒ ① MA ① $\not\Rightarrow$ ③

DIMOSTRAZIONI:

① λ autovalori, cioe' radici del polinomio caratteristico.

Voglio dimostrare che $\overline{\lambda} = \lambda$

Si usano i prodotti scalari:

prendo $\vec{v}$ autovettore

$$(\overline{v}|A\cdot v) = \overline{v}^T \cdot (Av) =$$

$$= \overline{v}^T \cdot \lambda v = \lambda \cdot \overline{v}^T \cdot v = \lambda(\overline{v}|v) = \lambda |v|^2$$

RICORDARE CHE: se $z \in \mathbb{C}$

$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$$(\vec{v}|\vec{w}) = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

$\vec{v}^T \cdot \vec{w}$

esempio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5-2i \\ 3i \end{pmatrix} \qquad \overline{v} = \begin{pmatrix} 5+2i \\ -3i \end{pmatrix}$$

$$v \cdot \overline{v} = (5-2i)(5+2i) + (3i)(-3i) = 25+4+9 = |v|^2.$$

Un numero è uguale al trasposto di sé stesso

$$\lambda |V|^2 (\overline{V}^T A V)^T = V^T A^T \overline{V} = V^T \underset{\text{matrice a coefficienti reali}}{A} \overline{V} = V^T (\overline{AV}) = V^T \overline{\lambda} \overline{V} =$$

$$= \overline{\lambda} V^T \overline{V} = \overline{\lambda} |V|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

(2) Prendo V_1, V_2 autovettori t.c. $A \cdot V_1 = \lambda_1 V_1$ e $AV_2 = \lambda_2 V_2$ dove $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\lambda_1 (V_1|V_2) = (\lambda_1 V_1|V_2) = (AV_1|V_2) = (AV_1)^T \cdot V_2 =$$

$$= V_1^T \cdot A^T V_2 \underset{\substack{A \\ \text{simm.}}}{=} V_1^T A V_2 = (V_1|AV_2) = (V_1|\lambda_2 V_2) = \lambda_2 (V_1|V_2)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(V_1|V_2) = 0 \Rightarrow (V_1|V_2) = 0 \text{ perché } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow V_1 \perp V_2$$