

TEST ← nozioni fondamentali:

- insiemi e funzioni
- equazioni e disequazioni
- "logica"

**GEOMETRIA
2018**

11/10/2018 GEOMETRIA

INSIEMI

- Sono concetti primitivi

→ NOTAZIONI:

① per elencazione: $A = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ (esempio) $\in$ simbolo di appartenenza

② per estensione: $B = \{x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

- $\mathbb{N}$ numeri naturali ($0 \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{N}_0$ numeri interi non negativi
- $\mathbb{Z}$ numeri interi
- $\mathbb{Q}$ numeri razionali
- $\mathbb{R}$ numeri reali
- $\mathbb{C}$ numeri complessi

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } "x \text{ è pari}"\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ x = 2 \cdot y\}$$

③ notazione funzionale: $B = \{2 \cdot y \mid y \in \mathbb{N}\}$

$$B = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$\exists$	$\forall$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\neg$
esiste	per ogni	e	o	se... allora	non
quantificatori					

$\cap$ intersezione
 $\cup$ unione

esercizio

Se $A = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$ e $B = \{k^2-1 \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$

allora $A \cap B = \emptyset$

$A = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$ (notazione funzionale) $\rightarrow f(x) = 3x-1$

$A = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ ← $3n-1$ (insieme)
 n è un numero naturale e $\leq 5 \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{k^2-1 \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$ $\rightarrow f(x) = x^2-1$

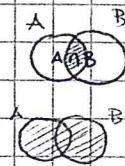
$B = \{0, 3, 8, 15, 24\}$ (insieme)
 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \emptyset$ e' falso perché 8 e' un elemento che sta sia in A che in B

OPERAZIONI TRA INSIEMI

• INTERSEZIONE: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

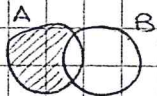
• UNIONE: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



gli unici elementi che non vanno bene sono quelli non contenuti ne' in A, ne' in B
 ↳ va bene se e' solo in A, solo in B e' anche se e' contenuto in entrambi

DIFFERENZA INSIEMISTICA

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (A meno B)



INCLUSO

• $A \subseteq B$ (A e' incluso in B) $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$



ogni elemento di A e' contenuto / incluso in B

esempio: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

EQUIVALE

• $A = B$ equivale a dire $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

• PRINCIPIO DI ESTENSIONALITA': due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

$$A = \{1, 4\}$$

$$B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 2\}$$

$$\{1, 2\}$$

gli insiemi sono uguali $\rightarrow A = B$

esempio

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$$



$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

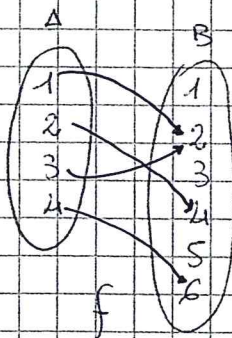


$\emptyset$: insieme vuoto (senza elementi)

FUNZIONI

$$f: A \rightarrow B$$

f e' una funzione
 con dominio l'insieme A
 ed avente valori
 nell'insieme B



$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 3$$

$$f(4) = 6$$

$$1 \xrightarrow{f} 2$$

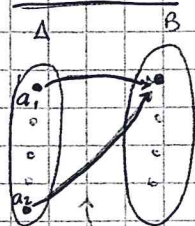
FUNZIONE: "Ad ogni elemento* del dominio si associa un e' uno solo elemento del codominio, denotato con $f(x)$ "

↳ immagine di x mediante f

6 1, 2, 3
28 1, 2, 4, 7, 14

} numeri "perfetti" ← la somma dei loro divisori
da' il numero stesso

INIETTIVA



NON SI SPRECANO FRECCHE: ⊕

~~ogni elemento di B è
capito da 1 solo elemento
di A~~

una è iniettiva

$f: A \rightarrow B$ non è iniettiva quando:

$$\exists a_1, a_2 \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$$

esempio

$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1) f è suriettiva? NO i numeri
negativi non sono quadrato di nessuno

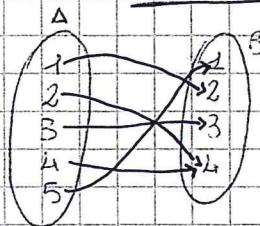
2) f è iniettiva? NO $f(-2) = f(2)$

⊛ definizione:

$f: A \rightarrow B$ è INIETTIVA se

$$\forall a_1, a_2 \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

SURIETTIVA



VA DA A SOPRA B

"Tutti gli elementi di B
sono 'colpiti'"

← ciascuno degli elementi del
codominio B è immagine di
ALMENO 1 elemento di A

~~$f: A \rightarrow B$~~ suriettiva

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b$$

$f: A \rightarrow B$ non è suriettiva

$$\neg (\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b)$$

$$\exists b \in B \forall a \in A \quad f(a) \neq b$$

esempio

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$f(x) = x^2$$

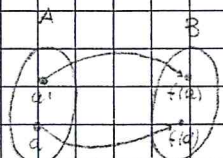
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è suriettiva? SI

18/10/2018

INIETTIVITA'

DOMINIO CODOMINIO

• Definizione: $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se: $\forall a, a' \in A \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$



(CONTRAPPOSIZIONE) $\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \rightarrow$ *nessuna negli esercizi*

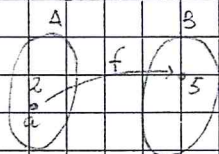
esempio: $P \Rightarrow Q$ equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$

> esempio: ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dove $f(x) = 3x - 1$ è iniettiva?

supponiamo che $f(a) = f(a')$, cioè che $3a - 1 = 3a' - 1$
 $3a = 3a'$
 $a = a'$

SURIETTIVITA'

• Definizione: $f: A \rightarrow B$ è suriettiva se: $\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$



> esempio: ① f di sopra è suriettiva? $5 \stackrel{?}{=} f(a) \quad 5 = 3a - 1$
 $\forall$ qualunque: $b = 3a - 1$
 $a = \frac{b+1}{3} \rightarrow f\left(\frac{b+1}{3}\right) = b$
 $3a = 6$
 $a = 2$

• Definizione: l'IMMAGINE di f è l'insieme dei "bersagli colpiti"

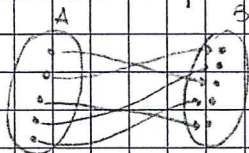
$$\text{Im}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A \quad f(a) = b\}$$

$\Rightarrow$ SURIETTIVA significa che $\text{Im}(f) = B$

BIGETTIVITA'

• Definizione: f è BIUNIVOCA o BIGETTIVA se: è sia iniettiva che suriettiva

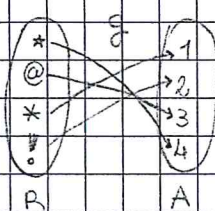
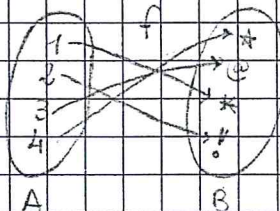
> esempio: ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dove $f(x) = 3x - 1$ è biunivoca



ogni elemento ha la sua freccia

FUNZIONE INVERSA

• Definizione: g è la FUNZIONE INVERSA di $f: A \rightarrow B$ se: $g: B \rightarrow A$

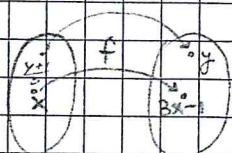


ATTENZIONE
NON TUTTE LE FUNZIONI
HANNO UN'INVERSA

"PRIMA f E POI g " $\rightarrow$ IDENTITA' (su A)

"PRIMA g E POI f " $\rightarrow$ IDENTITA' (su B)

> esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x - 1$



$$x \mapsto f \rightarrow y$$

$$3x-1$$

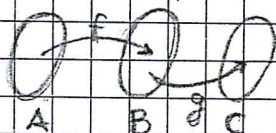
$$f(x) = 3x - 1 = y \rightarrow x = \frac{y+1}{3}$$



$$x \mapsto f \rightarrow (3x-1) \mapsto g \rightarrow (3x-1)+1 = x$$

$$y \mapsto g \rightarrow \left(\frac{y+1}{3}\right) \mapsto f \rightarrow 3\left(\frac{y+1}{3}\right) - 1 = y$$

• Definizione: Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, si definisce la COMPOSIZIONE $g \circ f: A \rightarrow C$ come la funzione "prima f poi g" cioè $(g \circ f): x \mapsto g(f(x))$



> esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x - 3$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3 \end{cases}$$

$$(g \circ f) \quad 5 \mapsto f \rightarrow 25 \mapsto g \rightarrow 22$$

$$(f \circ g) \quad 5 \mapsto g \rightarrow 2 \mapsto f \rightarrow 4$$

la composizione di funzioni è un esempio di proprietà non commutativa

$$(g \circ f)(x) \quad x \mapsto f \rightarrow x^2 \mapsto g \rightarrow x^2 - 3$$

$$(f \circ g)(x) \quad x \mapsto g \rightarrow x - 3 \mapsto f \rightarrow (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

SISTEMI

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 1x + 1y = 2 \end{cases} \rightarrow$ equazioni di rette in $\mathbb{R}^2$ (piano cartesiano)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 1x + 1y = 2 \end{cases}$$

REGOLA DI CRAMER $(2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1) = 5$

due incognite x, y
 $(2, 4)$ è soluzione? $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \neq 1$

$\rightarrow$ coppia di numeri perché è a due incognite

EQUAZIONI LINEARI $\rightarrow$ di 1° grado

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{IN GENERALE: } \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

$\rightarrow$ si risolvono per: - sostituzione
- riduzione/confronto

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x - 3y = 3 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A = B \\ C = D \\ A + C = D + B \end{matrix}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{5} = 1 \\ 2x = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$0 - 3y - 2y = 3 - 4 \rightarrow -5y = -1 \rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow ad - bc = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 5 \parallel Y = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3} = \frac{4 - 3}{5} = \frac{1}{5} \parallel X = \frac{1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2}{2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3} = \frac{1 + 2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$c. \begin{cases} aX + bY = \alpha \\ cX + dY = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} acX + bcY = \alpha \cdot c \\ adX + bdY = \beta \cdot d \end{cases}$$

$$a. \begin{cases} cX + dY = \beta \\ acX + daY = \beta \cdot a \end{cases} \quad \begin{cases} acX + daY = \beta \cdot a \quad (II^a \text{ eq.} - I^a \text{ eq.}) \\ // adY - bcY = \beta a - \alpha c \\ Y(ad - bc) = \beta a - \alpha c \end{cases}$$

$$Y = \frac{\alpha \beta - c \alpha}{ad - bc}$$

$$d. \begin{cases} aX + bY = \alpha \\ adX + bdY = d\alpha \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} cX + dY = \beta \\ chX + hdY = b\beta \end{cases} \quad \begin{cases} adX - chX = d\alpha - b\beta \\ X(ad - cb) = d\alpha - b\beta \end{cases}$$

$$X = \frac{d\alpha - b\beta}{ad - cb}$$

REGOLA DI CRAMER

Se $ad - bc \neq 0$ allora HO SOLUZIONE (HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE)

CHIAMIAMO DETERMINANTE $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$X = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

$$Y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

> esempio:

① nel caso: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0 \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}$$

② $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 7 \end{cases}$

$ad - bc = 0 \rightarrow ad = bc$: una equazione è multipla dell'altra : sono rette parallele
sono una multipla dell'altra

Se $ad - bc = 0$ le due equazioni (a parte i termini a destra) sono una multipla dell'altra.
Si tratta di 2 RETTE PARALLELE.

> esercizio

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$$

$$B = \{k \mid \exists n \in \mathbb{N} \, n \leq 4 \text{ e } n^2 = k\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

(5 elementi)

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

(4 elementi)

① esiste $f: A \rightarrow B$ iniettiva [suriettiva]

NON CI SONO FUNZIONI INIETTIVE perché A ha più elementi di B

→ è come se io avessi 4 cassetti e per ogni cassetto dovessi riempire con un solo oggetto, ma ho 5 oggetti quindi è sicuro che per un cassetto ci va più di un oggetto

- supponiamo A e B finiti. Se $|A| > |B|$ allora

NON ESISTE $f: A \rightarrow B$ INIETTIVA

Se $|A| \geq |B|$ allora

ESISTE $f: A \rightarrow B$ SURIETTIVA

② ogni $f: A \rightarrow B$ è iniettiva [suriettiva]

FALSO: non esiste 1 sola funzione iniettiva figuriamoci tutte

FALSO: non è detto che $\forall f: A \rightarrow B$ sia suriettiva

③ nessuna $f: A \rightarrow B$ è iniettiva [suriettiva]

VERO

FALSO: esiste almeno una funzione suriettiva

> se $|A| < |B|$

① sì iniettiva: esiste almeno una $f: A \rightarrow B$ iniettiva

NO suriettiva: non c'è nessuna $f: A \rightarrow B$ suriettiva

② NO iniettiva: non tutte le $f: A \rightarrow B$ sono iniettive

NO suriettiva: non ce ne è neanche una

③ NO iniettiva: Perché iniettive ce sono

SI suriettiva: non c'è nessuna $f: A \rightarrow B$ che sia suriettiva

> A, B finiti

esiste una funzione suriettiva $f: A \rightarrow B$] P

$Q \iff$

$|A| \geq |B|$

se A ha abbastanza elementi: la funzione suriettiva la trova. Se $A < B$ la f suriettiva non potrebbe esistere

implica
 $Q \Rightarrow P$

$P \Rightarrow Q$
 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ($A < B$)

equivalenza

c'è una funzione suriettiva da $A \rightarrow B$ $\iff |A| \geq |B|$

non c'è una funzione suriettiva da $A \rightarrow B$ ALLORA $A < B$

> Esiste una $f: A \rightarrow B$ iniettiva] P

$$\Leftrightarrow |A| \leq |B|] Q$$

se $A > B$ non c'è una funzione iniettiva

se $A \leq B$ c'è una funzione iniettiva

> Esiste una funzione biunivoca

$$f: A \rightarrow B$$

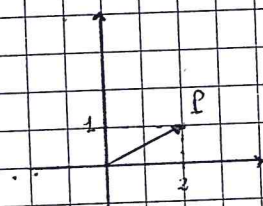
$$\updownarrow \\ |A| = |B|$$

22/10/2018

VETORI

$$\mathbb{R}^2 \quad P(2, 1)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



VEVTORE

(caratteristiche)

• DIREZIONE

• VERSO

• MODULO = lunghezza

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (\text{MODULO})$$

OPERAZIONI CON VETTORI

1. MOLTIPLICAZIONI PER SCALARI

$$\vec{v} \text{ vettore}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{VETTORE} \cdot \text{SCALARE} \rightarrow \text{VETTORE}$$

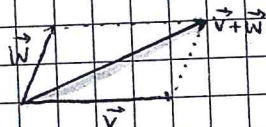
$\lambda \cdot \vec{v}$ stessa direzione, modulo λ , verso opposto (se $\lambda < 0$), uguale (se $\lambda > 0$)

> esempio: ① $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3$

$$3\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

2. SOMMA DI VETTORI

$$\vec{v} + \vec{w}$$

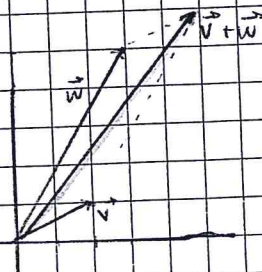


(Regola del parallelogramma)

> esempio: ①

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

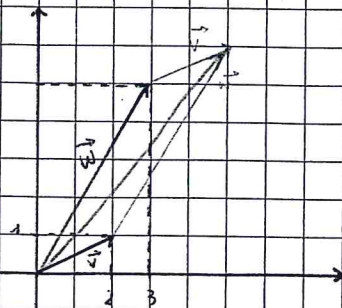


(SOMMA TRA VETTORI)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

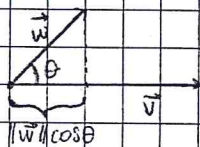
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

VEETTORE + VETTORE $\rightarrow$ VETTORE



3) PRODOTTO SCALARE

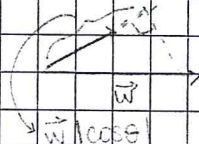
VEETTORE $\cdot$ VETTORE $\rightarrow$ SCALARE



$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

prodotto del modulo di $\vec{v}$ per la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{v}$

N.B. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$



> esempio: 1

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 + 5 = 11$$

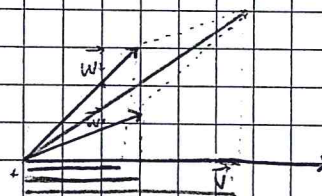
2 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

VEETTORI PERPENDICOLARI

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2$$



la proiezione di $(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$ su $\vec{v}$ è uguale alla somma delle proiezioni di $\vec{w}_1$ su $\vec{v}$ e di $\vec{w}_2$ su $\vec{v}$

0+0=0

$$\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2$$

$$= \|\vec{v}\| \cdot (\text{proiezione di } \vec{w}_1) + \|\vec{v}\| \cdot (\text{proiezione di } \vec{w}_2)$$

$$= \|\vec{v}\| \cdot (\text{proiezione di } \vec{w}_1 + \vec{w}_2)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

> ESERCIZIO:

① l'angolo formato dai vettori

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{w} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e' acuto, vero o falso?}$$

1° modo: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta = \sqrt{1+9+25} \cdot \sqrt{100+9} \cdot \cos \theta = \sqrt{35} \cdot \sqrt{109} \cdot \cos \theta = \sqrt{3815} \cos \theta$

2° modo: $\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \cdot 10 + (-3) \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 1$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{3815} \cdot \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3815}} \rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3815}} \xrightarrow{\cos^{-1}} \text{l'angolo e' acuto}$$

ANGOLO ACUTO $\rightarrow \cos > 0$

ANGOLO OTTUSO $\rightarrow \cos < 0$

ANGOLO RETTO $\rightarrow \cos = 0$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \rightarrow \begin{matrix} > 0 & \text{l'angolo e' acuto} \\ < 0 & \text{l'angolo e' ottuso} \\ = 0 & \text{l'angolo e' retto} \end{matrix}$$

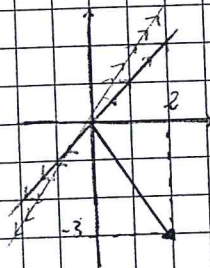
SISTEMI 2 VETTORI // SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

$$2x - 3y = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

equazioni di rette
⊥ e passante per l'origine



APPLICAZIONE LINEARE

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia la funzione dove

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

COMBINAZIONE LINEARE

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ è soluzione di } (*) \iff f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONI: (1) Il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$ ha soluzione $\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im} f$

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(2) f è suriettiva $\iff$ il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$ ha soluzione $\forall a, b \rightarrow$ c'è sempre un x, y che lo calcola

(3) f è iniettiva $\iff$ il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$ ha al massimo una soluzione $\forall a, b$

(4) f è biunivoca $\iff$ il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$ ha esattamente una soluzione $\forall a, b$

> Esercizio

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

PER CRAMER: $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 12 = 22$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{25 - 3}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{-2 - 20}{22} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$$

← le soluzioni sono SEMPRE UNICHE
• se $\det \neq 0 \iff f$ è BIUNIVOC

↓
Vale il (4) detto
Applicazione lineare

23/10/2018

NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = b \quad (b \geq 0)$$

per poterlo risolvere sarebbe opportuno avere $\sqrt{-1} = ?$

$$x = \pm \sqrt{b}$$

$$(?)^2 = -1$$

UNITA' IMMAGINARIA: i + serve a riempire $\sqrt{-1}$ che non esiste

$$i^2 = -1$$

$$\mathbb{R}, i \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

> esempi:

di numeri complessi

$$\bullet 3i \in \mathbb{C} \quad \text{IMMAGINARIO PURO}$$

$$\bullet \sqrt{2} \in \mathbb{C} \quad \text{REALE}$$

$$\bullet \sqrt{2} \cdot i \in \mathbb{C} \quad \text{IMMAGINARIO PURO}$$

$$\bullet \sqrt{2} + 3i \in \mathbb{C}$$

$$\bullet (2+5i)(1-3i) = 2 - 6i + 5i - 15i^2 = 17 - i$$

$$\bullet (2+5i) + (1-3i) = 3 + 2i$$

• SOMMA E PRODOTTO NEI NUMERI COMPLESSI SONO UGUALI A QUELLE DEI NUMERI REALI

• DIVISIONE NEI NUMERI COMPLESSI

$$\bullet \frac{1}{i} = ? \rightarrow \left(\frac{1}{i} \right)^2 = (i)^2 \rightarrow \frac{1}{-1} = (i)^2 \rightarrow i^2 = -1 \rightarrow i = i$$

$$\frac{1}{i} = x \Rightarrow ix = 1 \rightarrow i \cdot (-i) = 1$$

$$\bullet \frac{1}{3i} = -\frac{1}{3}i \quad \text{soluzione}$$

$$\bullet \frac{1}{1+i} = a+ib \rightarrow (1+i)(a+ib) = 1$$

$$a+ai+ib+i^2b = 1$$

$$a+ai+ib-b = 1$$

$$(a-b) + i(a+b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ b+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+a=1 \\ b=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ b=-1/2 \end{cases} \quad \text{soluzione}$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\rightarrow \text{RIPROVA: } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) (1+i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\bullet \frac{3+2i}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i}$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(3+2i)(2+5i) = 6 + 4i + 15i + 10i^2 = 6 + 19i - 10 = -4 + 19i$$

la parte immaginaria non c'è più

$$\rightarrow \text{riprova: } \left(-\frac{4}{29} + \frac{19i}{29} \right) (2-5i) = -\frac{8}{29} + \frac{20i}{29} + \frac{38i}{29} - \frac{95i^2}{29}$$

$$= -\frac{8}{29} + \frac{95}{29} + i \left(\frac{20+38}{29} \right) = \frac{87}{29} + \frac{58i}{29} = \frac{3+2i}{1} \rightarrow \text{torna}$$

$$\sqrt{i} = ?$$

$$\sqrt{i} = a+ib \rightarrow (a+ib)^2 = i$$

$$a^2 + i^2 b^2 + 2abi = i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = i$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

$$(a-b)(a+b) = 0$$

$$a-b=0$$

$$a=b$$

$$a+b=0$$

$$a=-b$$

$$\Rightarrow$$

1° CASO

$$a=b$$

$$2ab = 1$$

$$2a^2 = 1/2$$

$$a = \pm 1/2$$

SOLUZIONI

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

2° CASO

$$a=-b$$

$$-2a^2 = 1$$

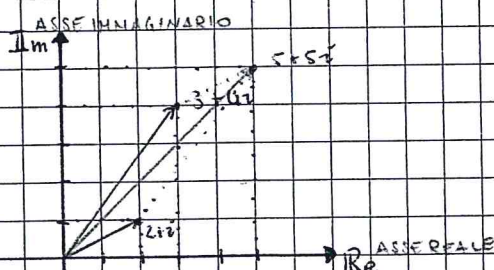
$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a^2 = -1/2 \rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

Le soluzioni sono valide solo per il primo $a=b$ perché il 2° è impossibile

$$\rightarrow \text{RIPROVA: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i^2 + \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2}i = i$$

IL PIANO COMPLESSO (GAUSS ARGAND)



$$a+ib$$

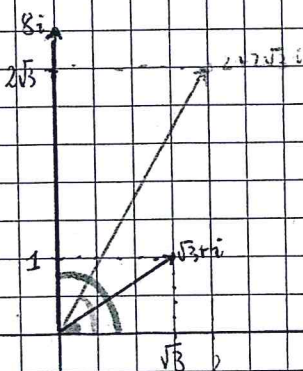
$$3+4i$$

$$(3+4i) + (2+i) = 5+5i$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$



$$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} + i)(2 + 2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + 6i + 2i - 2\sqrt{3} = 8i$$

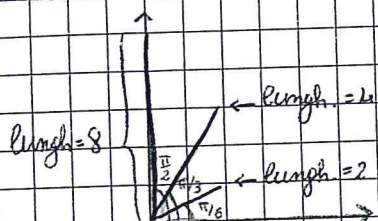
$$\Delta \rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

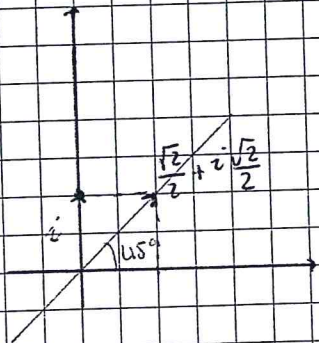
$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}, \cos \theta = \frac{2}{4}$$

$\Rightarrow$ L'ANGOLO DEL PRODOTTO = SOMMA DEGLI ANGOLI



← LUNGHEZZA DEL PRODOTTO = PRODOTTO delle LUNGHEZZE

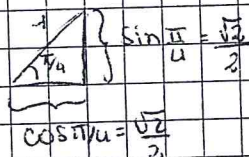
$\sqrt{i}$



Cerca $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^2 = i$

ANGOLO DI $z = 45^\circ = \pi/4$

LUNGHEZZA di $z = 1$



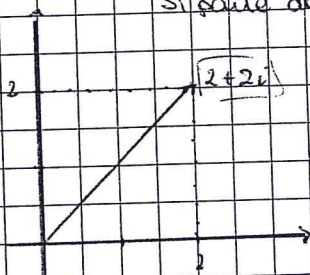
z → ANGOLO "Argomento"
→ LUNGHEZZA "Modulo"

Due modi equivalenti di scrivere i numeri complessi

① SCRITTURA CARTESIANA → esempio: $2 + 2i$

② SCRITTURA IN FORMA POLARE: → θ ARGOMENTO $0 \leq \theta < 2\pi$ $\theta + 2k\pi$
→ ρ MODULO $\rho \geq 0$

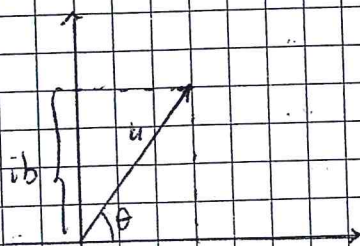
> esempio: $2 + 2i$



Si parte dalla forma cartesiana e si arriva a quella polare

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \rho = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rho = 4 \quad \theta = \pi/3 \rightarrow 60^\circ$$



$a + ib$

$$a = \rho \cdot \cos \theta = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$b = \rho \cdot \sin \theta = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

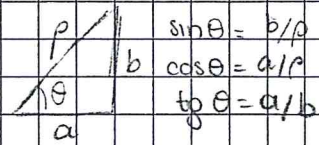
FORMULE DEL PIANO COMPLESSO

- Da coordinate polari (ρ, θ) a coordinate cartesiane (a, b)

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases} \quad P = (\rho, \theta) \rightarrow P = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

- Da coordinate cartesiane (a, b) a coordinate polari (ρ, θ)

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \arctg \frac{b}{a} \end{aligned}$$



POTENZE DI i

> ESERCIZI

$$\textcircled{1} (1 - 3i)^3 = 1 - 27i^3 + (-9i) + 27i^3 = 1 + 27i - 9i - 27 = 18i - 26$$

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

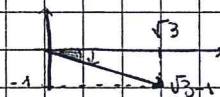
$$\textcircled{2} i^{21+5} = \sqrt{(i^2)^{10} \cdot i^1} \cdot i = (-1)^{10} \cdot i = -i \quad i^4 = 1$$

$$\textcircled{3} i^{10723} \rightarrow 10723 \frac{4}{368} \rightarrow 368 \cdot 4 \rightarrow (i^4)^{368} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1 \cdot -1 \cdot i = -i$$

$$\textcircled{4} (\sqrt{3} - i)^5 = \begin{cases} \rho = 2^5 = 32 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \cdot 5 = -\frac{5\pi}{6} \end{cases} \begin{cases} a = 32 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 32 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -16\sqrt{3} \\ b = 32 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16 \end{cases}$$

$$z = (\rho, \theta) \quad z^5 = z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z = (\rho^5, 5\theta)$$

$(\sqrt{3} - i) \rightarrow$ bisogna sapere le coordinate polari



$$\rho = 2, \quad \text{tg } \theta = -1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(\sqrt{3} - i)^5 = -16\sqrt{3} + 16i$$

- $\textcircled{5} z^3 = 1 \leftarrow$ e' di grado 3 quindi si hanno 3 soluzioni

coordinate polari: $z = (\rho, \theta) \rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta) = (1, \pi)$

$(1, \pi)$
la lunghezza
del vettore -1 e' 1



$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_1 = (1, \pi/3) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = (1, \pi) \rightarrow -1 \rightarrow \text{che' gia' come soluzione}$$

$$z_3 = (1, 5\pi/3) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\rightarrow z_1 \cdot z_3 \text{ al cubo fanno } -1$$

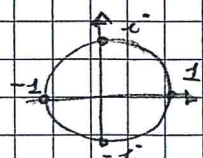
$k=0 \rightarrow \theta = \pi/3$
 $k=1 \rightarrow \theta = \pi/3 + 2\pi/3 = \pi$
 $k=2 \rightarrow \theta = \pi/3 + 4\pi/3 = 5\pi/3$
 $k=3 \rightarrow \theta = \pi/3$
3 angoli diversi
3 soluzioni diverse

> PER CASA: $z^4 = 1$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= i \\ z_4 &= -i \end{aligned}$$

$$(0, \pi/2) \rightarrow i \uparrow$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \\ \theta &= 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \end{aligned}$$



ESERCITAZIONE GEOMETRIA 23/10/2018

1) siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 - 5 < 30\}$ e $B = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ 3k-1=m\}$

determina $A \cap B$ elencando i suoi elementi.

$$A = \{3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

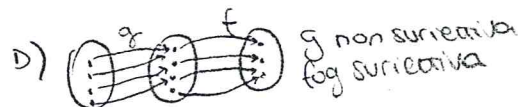
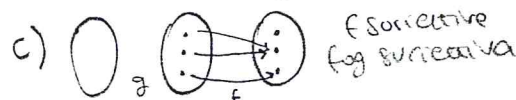
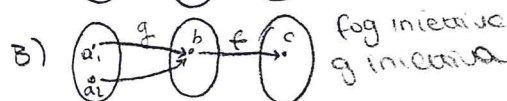
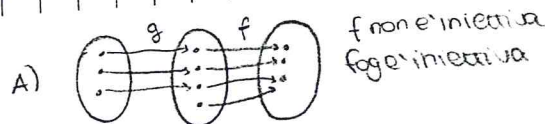
prendo gli n che osservo

assegnando un numero k e prendo il risultato che e' n

$$\begin{aligned} n=2 &\rightarrow 4-5=-1 \times \\ n=3 &\rightarrow 9-5=4 \checkmark \\ n=4 &\rightarrow 16-5=11 \checkmark \\ n=5 &\rightarrow 25-5=20 \checkmark \\ n=6 &\rightarrow 36-5=31 \times \end{aligned}$$

$$0 < x < 30$$

$$A \cap B = \{5\}$$



2) trovare l'angolo θ formato dai vettori

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ di } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = \sqrt{1+4+16} \cdot \sqrt{1+1+4} \cdot \cos \theta = \sqrt{21} \cdot \sqrt{6} \cos \theta = \sqrt{126} \cos \theta \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -1 + 2 - 8 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7 = \sqrt{126} \cos \theta \rightarrow \cos \theta = -\frac{7}{\sqrt{126}} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{7}{\sqrt{126}}\right) \end{cases}$$

3) Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire il valore di verità (vero o falso)

F a) f g iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva f non iniettiva $\Rightarrow f$ non iniettiva

V b) f g iniettiva $\Rightarrow g$ iniettiva g non iniettiva $\Rightarrow f$ non iniettiva

V c) f g suriettiva $\Rightarrow f$ suriettiva f non suriettiva $\Rightarrow f$ non suriettiva

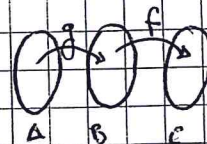
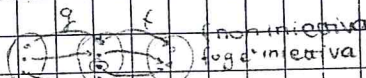
F d) f g suriettiva $\Rightarrow g$ suriettiva g non suriettiva $\Rightarrow f$ non suriettiva

e) f iniettiva $\Rightarrow \exists g$ tale che $f \circ g$ e' l'identita'

f) f suriettiva $\Rightarrow \exists g$ tale che $g \circ f$ e' l'identita'

g) f suriettiva $\Rightarrow \exists g$ tale che $f \circ g$ e' l'identita'

h) f suriettiva $\Rightarrow \exists g$ tale che $g \circ f$ e' l'identita'



4) Trovare le soluzioni del sistema al valore di α, β

$$\begin{cases} 2x - 5y = \alpha \\ 7x - 16y = \beta \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow 2(-16) - (-5) \cdot 7 = -32 + 35 = 3$$

$$\bar{X} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha & -5 \\ \beta & -16 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -16 \end{pmatrix}} \rightarrow \frac{-16\alpha + 5\beta}{3}$$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ \beta & 7 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -16 \end{pmatrix}} \rightarrow \frac{7\alpha - 2\beta}{3}$$

5) calcolare $(-i)^{2019}$

$$(-i)^{54} \cdot i^3 = (-(-1)) \cdot (-1) \cdot i = -i$$

6) Calcolare $\sqrt{3+4i} = a+ib$

$$3+4i = (a+ib)^2$$

$$3+4i = a^2 + i^2 b^2 + 2abi$$

$$= (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\begin{cases} 2ab = 4 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/b \\ 4/b^2 - b^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{4-b^4}{b^2} = 3 \Rightarrow 4-b^4 = 3b^2$$

$$b^2 \neq 0$$

$$b^2 = k$$

$$\downarrow$$

$$4 - k^2 = 3k$$

$$3k + k^2 - 4 = 0$$

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

$$b = +1$$

$$a = \frac{2}{b}$$

$$\rightarrow a = 2 \rightarrow \text{soluzione: } 2+i$$

$$k = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

$$b = -1 \rightarrow a = -2 \rightarrow \text{soluzione: } -2-i$$

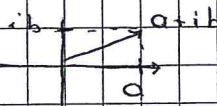
$$k = 1$$

$$k = -4 \text{ imp.}$$

$$b^2 = k$$

1) Il CONIUGATO di un numero complesso $z = a + ib$

è il numero $\bar{z} = a - ib$



$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

> esempio: $z = 3 - 4i$ $\bar{z} = -3 + 4i$ $(-3 + 4i)(-3 - 4i) = (-3)^2 - (4i)^2 = 9 - 16i^2 = 9 + 16$

Dimostrare che $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ ← (S)

$$\boxed{|z \cdot \bar{z}| = |z|^2}$$

$$z = a + ib$$

$$w = c + id$$

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac + iad + ibc + i^2 bd} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc) \end{aligned}$$

la parte reale
è uguale

la parte immaginaria
è uguale tranne per
un segno scambiato

L'OPERAZIONE DI CONIUGATO E DI PRODOTTO
SONO COMMUTATIVE

29/10/2018

APPLICAZIONI LINEARI

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 7z = 8 \\ 2x + 3y - 9z = -10 \end{cases} \quad (*)$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

COMBINAZIONE LINEARE
DEI VETTORI

$$\mathbb{R}^3 \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \stackrel{\text{def.}}{=} x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

→ risolvere il sistema (*) equivale a trovare

$$\text{vettori } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tali che } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

• f SURiettiva $\Rightarrow$ Il sistema (*) ha soluzione

→ Anzi, per ogni possibile scelta dei termini noti ~~il sistema~~ $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$, il sistema ha soluzione

• Il sistema (*) ha soluzione $\Leftrightarrow$ il vettore dei termini noti appartiene all'immagine di f

• $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è INiettiva $\Leftrightarrow$ non succede mai che il sistema (*) ^{almeno} ha due soluzioni diverse (comunque scelga i termini noti)
(oppure) $\Leftrightarrow$ per ogni scelta dei termini noti il sistema (*) ha al più una soluzione

DEFINIZIONE: Una funzione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice APPLICAZIONE LINEARE se è della forma:

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right) = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_m \vec{v}_m$$

dove $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$

> esempio:

① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

② $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$g \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \leadsto \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = \alpha \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = \beta \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ equazioni,} \\ 3 \text{ incognite} \end{array}$$

$$g \leadsto \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \quad \begin{array}{l} 7 \text{ equazioni,} \\ 4 \text{ incognite} \end{array}$$

• SISTEMA e APPLICAZIONE LINEARE sono due modi diversi per vedere la stessa cosa
 $\Rightarrow$ sistema = applicazione lineare

FORMULA DI GAUSS // RIDUZIONE DI GAUSS

$\rightarrow$ algoritmo per risolvere i sistemi

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + 2y - 2z = 2 \\ \text{II} \quad 2x + 9y - 7z = 8 \\ \text{III} \quad 2x + 3y - 9z = -10 \end{array}$$

($\rightarrow$ si prende un coefficiente alla volta)

$\boxed{\text{II} - 2\text{I}}$ (2° eq. - 2(1° eq.)) ; $\boxed{\text{III} - 2\text{I}}$ sotto la x ci devono essere 0

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 0 + 5y - 1z = 0 \\ 0 - 1y - 5z = -14 \end{cases}$$

$\rightarrow 9 - (2 \cdot 4) \quad -7 - (-2 \cdot 4) = -7 - (-8)$
 $\rightarrow 3 - 2(2) \quad -9 - (-2 \cdot 2) \quad -10 - (2 \cdot 2)$

$\leftarrow$ si riscrive la I°

$\downarrow \text{III} + \text{II}$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ y + z = 0 \\ -4z = -14 \end{cases}$$

SISTEMA TRIANGOLARE

$\leftarrow$ si riscrive la I° e la II°

$$z = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ y + z = 0 \\ -4z = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2\left(-\frac{7}{2}\right) - 2\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \\ y = -\frac{7}{2} \\ z = \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow x - 14 = 2 \rightarrow x = 16$$

30/10/2018

APPLICAZIONI LINEARI

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 3x-2z \\ 4x \\ 5y-7z \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4 \\ -10-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix}$$

? f è un'applicazione lineare?

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2 + z \vec{v}_3$$

dove $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ DEFINIZIONE

→ cioè f è della forma seguente?
(COMBINAZIONI LINEARI DI $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$)

> esempio:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x - 2z = \alpha \\ 4x = \beta \\ 5y - 7z = \gamma \end{cases} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare? Si

$\textcircled{2} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+1 \\ x^2+y \end{pmatrix} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

è un'applicazione lineare? NO

- 1) c'è un termine noto (+1) non moltiplicato per x o y
- 2) compare un termine non lineare (x^2)

DEFINIZIONE:

(alternativa) $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'APPLICAZIONE LINEARE se:

(i) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$$

(ii) Per tutti $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

> esempio:

$\textcircled{1}$ $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2z \\ 4x \\ 5y-7z \end{pmatrix} \rightarrow f \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix}$

$\textcircled{\lambda=3} \rightarrow f \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -51 \end{pmatrix}$

dimostrazione di $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

$$f \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3(\lambda x) - 2(\lambda z) \\ 4(\lambda x) \\ 5(\lambda y) - 7(\lambda z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda x - 2\lambda z \\ 4\lambda x \\ 5\lambda y - 7\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(3x-2z) \\ \lambda(4x) \\ \lambda(5y-7z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x-2z \\ 4x \\ 5y-7z \end{pmatrix} = \lambda f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1i)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2z \\ 4x \\ 5y-7z \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

si sostituisce qui

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

dimostrazione di $f(\vec{v} + \vec{w}) = f\vec{v} + f\vec{w}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(v_1 + w_1) - 2(v_3 + w_3) \\ 4(v_1 + w_1) \\ 5(v_2 + w_2) - 7(v_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 + 3w_1 - 2v_3 - 2w_3 \\ 4v_1 + 4w_1 \\ 5v_2 + 5w_2 - 7v_3 - 7w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3v_1 - 2v_3) + (3w_1 - 2w_3) \\ 4v_1 + 4w_1 \\ (5v_2 - 7v_3) + (5w_2 - 7w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_3 \\ 4v_1 \\ 5v_2 - 7v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3w_1 - 2w_3 \\ 4w_1 \\ 5w_2 - 7w_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$

- Se f soddisfa le due proprietà (i) e (ii) posso concludere che f è un'applicazione lineare nel senso della definizione data ieri come combinazione lineare di vettori?

[Def 1 $\Rightarrow$ Def. aet.]
 $\Leftarrow$

> esempio: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa (i) e (ii)

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_1, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \rightarrow \text{(ii)} \quad f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

usiamo
(i) e (ii)

$$(i) \quad x f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2 + z \cdot \vec{v}_3$$

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$ è un'applicazione lineare

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x \\ 5y-7z \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = x \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> esempio

① $f(x) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2-y \end{pmatrix}$

non sarà un'app. lineare

⚡ (i) & (ii) non si verificano

② $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

③ $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{?}{=} f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

la proprietà

non è un'app. lineare ⚡ (ii) non si verifica

② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 7x$ è applicazione lineare?

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad f(1 \cdot x) &= 7(1x) = 7 \cdot 1x \\ 1(f(x)) &= 1(7x) = 7 \cdot 1x \end{aligned} \right\} \text{si}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} f(3) &= 21 \\ f(5) &= 35 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f(3+5) &= f(8) = 56 \\ f(3) + f(5) &= 21 + 35 = 56 \end{aligned} \right\} \text{si}$$

È UN'APPL. LINEARE

③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

NON è un'app. lin.

$$\left. \begin{aligned} f(1) + f(2) &= 1^2 + 2^2 = 5 \\ f(3) &= 3^2 = 9 \end{aligned} \right\} \text{no}$$

④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$ NON È app. lin.

$$\begin{aligned} f(3) &= 7 \\ f(2 \cdot 3) &= 13 \neq 2 \cdot f(3) \end{aligned}$$

⑤ $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ App. lin.

$$f(\vec{0}) \stackrel{?}{=} \vec{0}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_m \vec{v}_m \quad \text{dove } v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ A.L.}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(i) f\left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VERIFICARE SE E' UN'APPLICAZIONE LINEARE SI PUO' FARE LA

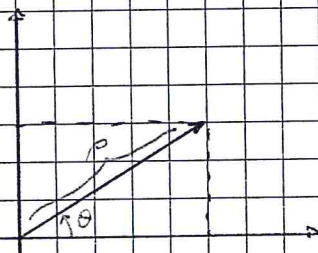
VERIFICA DI $f(0) \rightarrow$ se $f(0) = 0$ allora può essere un'A.L.
 $\rightarrow$ se $f(0) \neq 0$ allora non e' un'A.L.

RISOLVERE L'EQUAZIONE COMPLESSA:

$$z^6 = -8$$

Coordinate polari

$$z \sim (p, \theta)$$



$$z^6 = z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \sim (p^6, 6\theta)$$

$\leftarrow$ e' un numero reale ma e' anche un numero complesso

$$-8 = \left(\underset{p}{8}, \underset{\theta}{\pi + 2k\pi} \right)$$

$$z^6 = -8$$

$$(p^6, 6\theta) = (8, \pi + 2k\pi) \rightarrow \begin{cases} p^6 = 8 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$p^6 = 8 = 2^3 \Rightarrow p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2} \quad [p \in \mathbb{R} \quad p \geq 0]$$

$$k=0 \rightarrow \theta = \pi/6$$

$$k=1 \rightarrow \theta = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2$$

$$k=2 \rightarrow \theta = \pi/6 + 2\pi/3 = 5\pi/6$$

$$k=3 \rightarrow \theta = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$$

$$k=4 \rightarrow \theta = \pi/6 + 4\pi/3 = 3\pi/2$$

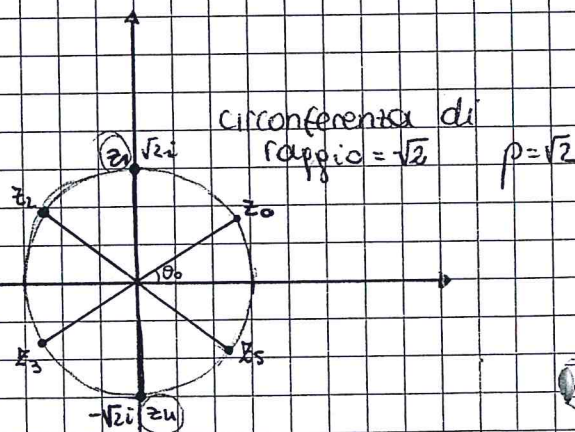
$$k=5 \rightarrow \theta = \pi/6 + 5\pi/3 = 11\pi/6$$

$$6\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \leftarrow \theta_0 = \pi/6$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$(\sqrt{2} i)^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot i^6 = 8 \cdot i^4 \cdot i^2 = 8 \cdot 1 \cdot -1 = -8$$



> ESERCIZIO :

1) $z = 3 + i$ $\bar{z} = (3 - i)$

$w = 1 - 2i$

$$\frac{(\bar{z})^2}{w \cdot i} = \frac{(3-i)^2}{(1-2i)i} = \frac{9+i^2-6i}{i-2i^2} = \frac{8-6i}{i+2}$$

$$= \frac{8-6i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{16-12i-8i+6i^2}{4-i^2} = \frac{16-6-20i}{5} = \frac{10-20i}{5} = 2-4i$$

→ riprova: $(2-4i) \cdot (2+i) \stackrel{?}{=} 8-6i$

$$\frac{4-8i-4i^2+2i}{8-6i} = \frac{8-6i}{8-6i}$$

2) $8z^3 + i = 0$

$8z^3 = -i$ $z^3 = -\frac{1}{8}i$

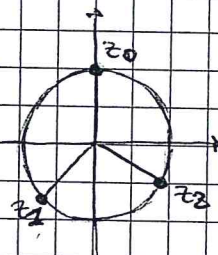
$z = (p, \theta) \Rightarrow z^3 = (p^3, 3\theta)$



$p^3 = \frac{1}{8} \rightarrow p = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{8}, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$

$k=0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $k=1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{7\pi}{6}$
 $k=2 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} \rightarrow \frac{11\pi}{6}$



$z_0 = \frac{1}{2}i \rightarrow z_0^3 = \frac{1}{8}i^3 = -\frac{1}{8}i = z^3$

$z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

$z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

5/11/2018

SPAN, GENERATORI, BASI

DEFINIZIONE: $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$

$$\text{SPAN}(V_1, \dots, V_k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda_1 \vec{V}_1 + \dots + \lambda_k \vec{V}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

> esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Span}(V_1, V_2) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$V_1 \quad V_2$

$$\textcircled{*} \begin{cases} x_1 - x_2 = \alpha \\ 3x_1 + 4x_2 = \beta \\ x_2 = \gamma \end{cases} \quad \leftarrow \text{SISTEMA } 3 \times 2 \quad (3 \text{ eq., } 2 \text{ inc.})$$

$$\downarrow$$
$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ APPLICATIONE LINEARE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f \rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema $\textcircled{*}$ ha soluzione

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \text{Im } f$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

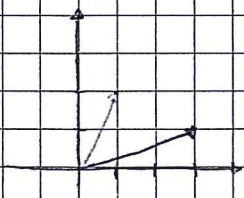
$$? \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ?$$

È vero o no che esistono λ_1, λ_2 tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{NON} \\ \text{ha soluzione} \\ \hookrightarrow \text{IMPOSSIBILE} \end{array}$$

$$\text{CONCLUSIONE: } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \stackrel{!}{=} \mathbb{R}^2$$



$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = \alpha \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = \beta \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 = -5$$

il det $\neq 0$ quindi la soluzione esiste per ogni scelta dei termini noti $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

DEFINIZIONE: Se $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ allora si dice che $v_1, \dots, v_n$ GENERANO $\mathbb{R}^n$

> esempio

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

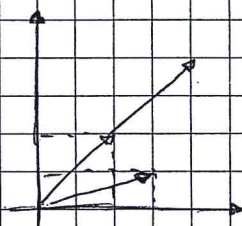
$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

> esempio

$$v_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$v_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

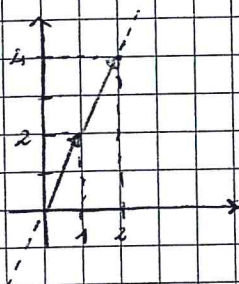


■ v_1 e v_2 sono paralleli (cioè uno è multiplo dell'altro) $\iff ad - bc = 0$

Quindi due vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ GENERANO tutto $\mathbb{R}^2 \iff$ il determinante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

> ESERCIZIO:

① $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$



$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$l_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sono tutti e soli vettori che stanno sulla retta per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(COORDINATE)

② $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$

(e_1, e_2) generano $\mathbb{R}^2$

↓
VETTORI DELLA BASE CANONICA

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$
BASE CANONICA

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_1 + 3l_2 = 3 \\ 2l_1 + l_2 = 4 \end{cases}$$

$$l_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}; \quad l_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$l_1 = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}; \quad l_2 = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

(verifica:) $\rightarrow \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} + \frac{6}{5} \\ \frac{18}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

③ Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$? SI $\rightarrow -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ NON E' UNA BASE

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ E' UNA BASE

domanda: COORDINATE DI $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E$ rispetto a B ?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{cases} -d_1 + d_2 = 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \end{cases}$$

$$\hline \text{'' } 2d_2 = 4 \Rightarrow d_2 = 2$$

$$\Rightarrow d_1 = -1$$

$$\Rightarrow -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$