Ingegneria Edile-Architettura – Design Industriale

Compito di Geometria

7 Gennaio 2026
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione, e scriverle sia in forma polare che in forma cartesiana:

$$z^3 - 16\,\overline{z} \;=\; 0.$$

Esercizio 2. [10 pt.]

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$
- $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$

1. Trovare una base di V.
2. Trovare una base di W.
3. Descrivere V in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. [11 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. [6pt.]

Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate rispetto alla base canonica:

1. $f(1,0,0) \neq 0$ è un vettore non nullo che appartiene ad entrambi i piani $x_1 - x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.
2. $(0,1,0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = -2$.
3. f non è invertibile.

Determinare inoltre quali delle applicazioni lineari che soddisfano le proprietà di sopra sono non diagonalizzabili.