Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

8 Settembre 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se l'argomento di un numero complesso z è $\vartheta + 2k\pi$ allora l'argomento di $3z$ è $3\vartheta + 2k\pi$.	☐	☒
2) Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile se e solo se ha n pivot.	☒	☐
3) Se il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$ allora $z^6 = 64$.	☐	☒
4) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.	☒	☐
5) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^7$ sono sottosp. vettoriali e $\dim(V) = \dim(W) = 4$ allora $\dim(V \cap W) \geq 1$.	☒	☐
6) Se v e w sono due autovettori di autovalori distinti allora anche $v + w$ è autovettore.	☐	☒
7) Se la matrice associata ad un'appl. lineare f non ha colonne libere allora f è suriettiva.	☐	☒
8) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ sono linearm. indipendenti se e solo se l'appl. lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dove $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ è iniettiva.	☒	☐
9) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n^2 - 1 \leq 32\}$ contiene 4 elementi. [Ricordare che $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ non contiene 0].	☒	☐
10) Esistono insiemi di generatori di $\mathbb{R}^4$ che contengono 3 vettori.	☐	☒
11) L'unione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.	☐	☒
12) Siano $u = (1, -4, 1)$, $v = (0, -2, 1)$ e $w = (1, 0, -1)$. Allora $w \in \text{Span}\{u, v\}$.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 8 Settembre 2025

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]

1. Considerare i numeri complessi $z := 2 + 2\sqrt{3}i$ e $w := 4\sqrt{3} - 4i$. Scrivere le coordinate polari e le coordinate cartesiane del seguente numero complesso, dove $\overline{w}$ denota il coniugato di w:
$$\frac{z^3}{(\overline{w})^2}$$

2. Scrivere in forma cartesiana tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:
$$z^3 = -8.$$

1. z ha coordinate polari $\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \pi/3 \end{cases}$.

Infatti $4(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}$

w ha coordinate polari $\begin{cases} \rho = 8 \\ \theta = -\pi/6 \end{cases}$.

Infatti $8(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} -$

Allora $z^3 \rightsquigarrow (64, \pi)$, $\overline{w} \to (8, \pi/6)$ e $(\overline{w})^2 \to (64, \pi$

Quindi $\frac{z^3}{(\overline{w})^2} \rightsquigarrow \left(\frac{64}{64}, \pi - \pi/3\right) = \left(1, \frac{2}{3}\pi\right)$ che, scritto in coordinate cartesiane, e' $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

(2) $z \rightsquigarrow (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta)$

Inoltre $-8 \rightsquigarrow (8, \pi)$.

Quindi $z^3 = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \\ \theta = \pi/3 + 2\pi/3 \cdot k \end{cases}$

$(k \in \mathbb{Z}$

Le soluzioni sono:

$z_1 = (2, \pi/3) \rightsquigarrow 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = (2, \pi) \rightsquigarrow 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

$z_3 = (2, 5/3\,\pi) \rightsquigarrow 2(\cos 5/3\,\pi + i \sin 5/3\,\pi) = 1 - \sqrt{3}\, i$

Esercizio 2. [10 pt.]

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\}$.

1. Trovare una base di V.
2. Descrivere V in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
3. Trovare una base di W.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^3$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\quad P \quad L$

Le colonne pivot corrispondono ai vettori che sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di V

(2.) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in V \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff$

il sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = b_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = b_2 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 = b_3 \end{cases}$ ha soluzione.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ -2 & -2 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 2 & b_3 + 2b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 2 \\ 0 & 0 & b_3 + b \end{array}\right.$

Quindi $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in V \iff b_3 + b_2 = 0$ e possiamo conclude

che $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 + x_3 = 0 \right\}$

3

$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad 2x_1 - 3\cdot 1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ $\quad 2x_1 - 3\cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base di W e' $\mathcal{B}_W = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4 Lo spazio $V \cap W$ e' l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x_2 + x_3 = \\ 2x_1 - 3x_2 - \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ P \quad P \quad L \end{array}$$

$x_3 = 1$ VARIABILE LIBERA

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 1 = 0 \\ x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = -1$ & $2x_1 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ determine une base di $V \cap W$

5 Per Grassman, $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$

$= 2 + 2 - 1 = 3$ e quindi, visto che $V+W \subseteq \mathbb{R}^3$, segue necessariamente che $V + W = \mathbb{R}^3$

Esercizio 3. [11 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

① $$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -6-\lambda & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 4-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sviluppo lungo la IV riga}]{\det} (-2-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -12 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)\cdot\left[(-6-\lambda)(4-\lambda)+\ldots\right.$$

$\lambda^2+6\lambda-4\lambda-\ldots$

sviluppo lungo la III colonna

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2(\lambda-1)$$

$\lambda=0$ e $\lambda=1$ autovalori di molt. alg. 1

$\lambda=-2$ autovalore di molt. alg. 2

② $\boxed{\lambda=0}$ $$A-0I = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e II}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ -6 & -12 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\frac{3}{2}\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P \end{matrix} \end{array}$$

x_2 variabile libera

Poniamo $x_2 = 1$

$$2x_1 + 4 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 =$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \quad + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore che forma una base di $Aut_0(A)$

$\boxed{\lambda = 1}$ $\quad A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e II}}$

per comodità di calcolo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ -7 & -12 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - \frac{3}{2} I]{II + \frac{7}{2} I} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3 \\ 0 & 3/2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{4} III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

x_3 variabile libera. Poniamo $x_3 = 1$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad + 2x_4 = 0 & \Rightarrow \ 2x_1 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = \\ \quad -\frac{3}{2}x_2 \quad + 3x_4 = 0 & \Rightarrow \ -\frac{3}{2}x_2 + 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 = \\ \quad\quad 12x_4 = 0 & \Rightarrow \ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore di forma una base di $Aut_1(A,$

$\underline{\lambda = -2}$ $\quad A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{per comodita' di calcolo scambio I e}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ -4 & -12 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \frac{3}{2}\text{I}]{\text{II} + 2\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sca} \atop \text{II} \leftarrow}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

x_3 e x_4 variabili libere

$\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \quad + 2x_4 = 0 \\ \quad -3x_2 + 3x_3 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \ -3x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2 =$

$2x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 2x_1 + 6 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ $\quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + \quad 2x_4 = 0 \\ \quad -3x_2 + 3x_3 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow -3x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 2x_1 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base di $Aut_{-2}(A)$ e'

$$\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

③ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ e' una base di autovettori. Quindi A e' diagonalizzabile.

Se $S = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3 \middle| \vec{v}_4 \right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e' la matrice cambio di base, allora

$$S^{-1} A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ e' diagonale

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha le seguenti proprietà:
   (a) $v = (-1, -1, 0)$ e $w = (0, 1, 0)$ sono autovettori di autovalore $\lambda = -2$.
   (b) f non è iniettiva.
2. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
3. Determinare se è vero oppure no che esiste un'unica appl. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le proprietà (a) e (b) di sopra.
   In caso positivo giustifica la risposta; in caso negativo, mostra esplicitamente almeno due diverse appl. lineari che soddisfano (a) e (b).

① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfa $f(v) = -2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

e $f(w) = -2w = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$

Notiamo che $\mathcal{B} = \left\{ v, w, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ forma una base di

Infatti $S = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e' invertibile (e' facile vedere che il suo determinante e' -1).

Per individuare una appl. lineare basta assegnare i suoi valori sui vettori di una base. Nel ns. caso ponendo $f\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ e

$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ otteniamo una funzione con le proprieta' richieste. Infatti $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ garantisce f NON inie

② La matrice B associata ad f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v & w & u \end{array} \right\}$$

e'

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

perche' $f(v) = -2v$, $f(w) = -2w$ e $f(u) = 0$

Notiamo che $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -v + w$

$e_2 = w$

$e_3 = u$

Quindi $f(e_1) = -f(v) + f(w) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

e percio', se A e' la matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ si ha

$$A = \left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) In base alle considerazioni già fatte, per ipotesi deve essere

$$f(e_1) = -f(v) + f(w) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $f(e_2) = f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi la matrice associata ad A rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ -4 & -2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{dove } f(e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

f è non iniettiva $\iff$ A ha una variabile libera $\iff$ (è una matrice quadrata) A non è invertibile $\iff$ $\det A = 0$.

$$\det A = c \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -4c = 0 \iff c = 0$$

Quindi ogni matrice della forma $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ -4 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà richieste.

Ad esempio $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.