Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 8 Settembre 2025

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]

1. Considerare i numeri complessi $z := 2 + 2\sqrt{3}i$ e $w := 4\sqrt{3} - 4i$. Scrivere le coordinate polari e le coordinate cartesiane del seguente numero complesso, dove $\overline{w}$ denota il coniugato di w:
$$\frac{z^3}{(\overline{w})^2}$$

2. Scrivere in forma cartesiana tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:
$$z^3 = -8.$$

Esercizio 2. [10 pt.]
Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$
- $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\}.$

1. Trovare una base di V.
2. Descrivere V in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
3. Trovare una base di W.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. [11 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha le seguenti proprietà:
   (a) $v = (-1, -1, 0)$ e $w = (0, 1, 0)$ sono autovettori di autovalore $\lambda = -2$.
   (b) f non è iniettiva.
2. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
3. Determinare se è vero oppure no che esiste un'unica appl. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le proprietà (a) e (b) di sopra.
   In caso positivo giustifica la risposta; in caso negativo, mostra esplicitamente almeno due diverse appl. lineari che soddisfano (a) e (b).