

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

23 Giugno 2025

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2

Proposizione	Vera	Falsa
1) Se $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare allora $\text{Im}(f) = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$.	☒	☐
2) Se la ridotta della matrice A ha variabili libere allora il sistema lineare omogeneo $A \cdot \vec{x} = 0$ ha infinite soluzioni.	☒	☐
3) Se l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ non è iniettiva, allora f non è suriettiva.	☒	☐
4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.	☒	☐
5) Se $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{2m + 1 \mid 1 \leq m \leq 6\}$, allora $A \cap B$ ha esattamente un elemento.	☐	☒
6) Tutte le matrici 2×2 sono diagonalizzabili.	☐	☒
7) Se z è un numero complesso di argomento $\vartheta = \pi/3$ allora z^3 è un numero reale.	☒	☐
8) $w_1 = (0, 2, 3)$ appartiene allo span di $w_2 = (1, 1, 2)$ e $w_3 = (-1, 1, 1)$.	☒	☐
9) Se $V \neq W$ sono sottospazi diversi di $\mathbb{R}^3$ che hanno dimensione 2, allora $V + W = \mathbb{R}^3$.	☒	☐
10) Se v_1 e v_2 sono autovettori di autovalore λ allora $v_1 - v_2$ è autovettore di autovalore λ .	☒	☐
11) Se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ generano $\mathbb{R}^3$ allora sono linearmente indipendenti.	☒	☐
12) Se la composizione $f \circ g$ è suriettiva allora f è suriettiva.	☒	☐

Es. 1

$$z = a + ib$$

$$e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = e^a (\cos(\cancel{b}) + i \sin(\cancel{-b})) \rightsquigarrow \begin{cases} \rho = e^a \\ \theta = -b \end{cases}$$
$$= e^a (\cos b - i \sin b)$$

$$4 \cdot e^{2z} = 4 \cdot e^{2a+2ib} = 4 e^{2a} (\cos 2b + i \sin 2b) \rightsquigarrow \begin{cases} \rho = 4e^{2a} \\ \theta = 2b \end{cases}$$

$$e^{\bar{z}} - 4e^{2z} = 0 \Leftrightarrow e^{\bar{z}} = 4e^{2z} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = 4e^{2a} \\ -b = 2b + 2k\pi \end{cases}$$

$$e^a = 4e^{2a} \Leftrightarrow \lg e^a = \lg 4e^{2a} \Leftrightarrow$$

$$a = \lg 4 + \lg e^{2a} = \lg 4 + 2a \Leftrightarrow a = -\lg 4 = \lg \frac{1}{4}$$

$$-b = 2b + 2k\pi \Leftrightarrow 3b = -2k\pi \Leftrightarrow b = -k \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'insieme delle soluzioni è infinito ed è il seguente:

$$\mathcal{S} = \left\{ \lg \frac{1}{4} - i k \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Es. 2

- (1) $V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Considero la matrice avente quei vettori come colonne, e riduco:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P P L

La terza colonna è libera, quindi dipende linearmente dalle precedenti (è superflua). Le prime due colonne sono pivot, quindi una base di V è data dai primi due vettori:

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (2) W è il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \text{P} & \text{L} & \text{L} \end{pmatrix}$.

Una base si trova ponendo:

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - 1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) $V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' l'insieme dei vettori $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ per i quali il sistema $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ha soluzione.

$$\begin{cases} -\lambda_1 = b_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = b_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = b_3 \end{cases}$$

Riduco la matrice associata:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 2 & -1 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2+2b_1 \\ 0 & 1 & b_3+3b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & b_1+2b_1 \\ 0 & 0 & b_3+3b_1+b_2+2b_1 \end{array} \right)$$

Il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow$

$$b_3+3b_1+b_2+2b_1 = 5b_1+b_2+b_3 = 0.$$

Quindi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(4) Usando le forme implicite, $V \cap W$ e' l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, cioè

il nucleo di $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[5 \cdot \text{II}]{2 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 2 & 0 \\ 10 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Variabile libera x_3

$$x_3 = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow -3x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$10x_1 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{V \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(5) Visto che $\dim V = 2$ e $\dim W = 2$ e $\dim(V \cap W) = 1$,
 per la formula di Grassmann $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) =$
 $= 2 + 2 - 1 = 3$, e quindi, visto che $V+W \subseteq \mathbb{R}^3$
 deve necessariamente essere $V+W = \mathbb{R}^3$

Es. 3

$$(1) \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} \text{(sviluppo lungo la IV riga)}$$

$$(2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la III colonna)}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1) \left[\begin{array}{c} (-\lambda)(3-\lambda)+2 \\ \lambda^2-3\lambda+2 \end{array} \right] = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\lambda=2$ autov. di mult. alg. 2
 $\lambda=-1$ autov. di mult. alg. 1
 $\lambda=1$ autov. di mult. alg. 1

$$(2) \quad \underline{\lambda=2}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II}-\text{I} \\ \text{III}+\text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{sambio } \text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P L P L

Troviamo una base di

$$\text{Aut}_\lambda(2) = \ker(A - 2I).$$

x_2 e x_4 variabili libere.

$$\begin{matrix} x_2=1 \\ x_4=0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ -3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2=0 \\ x_4=1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ -3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio $\text{Aut}_A(2)$ è $B_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 Quindi $\lambda=2$ ha mult. geometriche 2.

$\lambda = -1$

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{scambio}]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{II} - 4\text{I} \\ \rightarrow \\ \text{III} + \text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{1}{2}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{scambio}]{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P P L P

x_3 variabile libera

$$x_3=1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array} \right. \quad B_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } \text{Aut}_A(-1) = \ker(A+I)$$

Quindi $\lambda = -1$ ha mult. geometriche 1.

$$\lambda = 1$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{scambio}]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} + \text{I} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{scambio}]{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

P P L P

x_3 variabile libera. Poniamo $x_3 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 - 2x_3 = x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = x_1 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$B_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e' una base di } \text{Aut}_A(1) = \ker(A - I)$$

Quindi $\lambda = +1$ ha mult. geometriche 1.

$$(3) \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e' una base di autovettori.}$$

La matrice "cambio di base" $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

tale che $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 4

(1) significa che $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) significa che $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ per qualche $a \neq 0$.

La matrice associata a T rispetto alla base canonica e'

$$A = \left(T(e_1) \mid T(e_2) \mid T(e_3) \right) = \begin{pmatrix} -1 & -a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & d \end{pmatrix} \quad \text{dove } T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

T non è invertibile $\Leftrightarrow \det A = 0$.

$$\det A = (\text{sviluppo lungo la II npe}) = (-c) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = -c(-a) = ac$$

Visto che $a \neq 0$ deve essere $c = 0$.

Quindi le matrici ^A associate rispetto alla base canonica delle appl. lineari T che soddisfano le proprietà richieste sono tutte e sole quelle della forma:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d \end{pmatrix} \quad \text{dove } a, b, d \in \mathbb{R} \text{ con } a \neq 0$$

Vediamo quando A è diagonalizzabile.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -a & b \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a & d-\lambda \end{pmatrix} = (\text{sviluppo lungo la II riga})$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & b \\ 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(d-\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-d)$$

Gli autovalori sono $\lambda=0$, $\lambda=-1$, $\lambda=d$.

• Se $d \neq 0, -1$ si hanno 3 autovalori reali distinti e A è diagonalizzabile.

• Se $d=0$, abbiamo $\lambda=0$ con mult. alg. 2 e $\lambda=-1$ con m.a. 1

$$\lambda=0 \quad A - 0 \cdot I = A = \begin{pmatrix} -1 & -a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{sambio}} \begin{pmatrix} -1 & -a & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\text{Aut}_A(0) = \ker(A)$ ha dimensione 1.

La matrice AA è diagonalizzabile perché $\lambda=0$

ha mult. alg. 2 ma m.g. = 1

• Se $d=-1$, abbiamo $\lambda=0$ con m.e. = 1 e $\lambda=-1$ con m.a. 2

$$\lambda=-1 \quad A + 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{sambio}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - a \cdot \text{I}]{\text{II} + a \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

$\downarrow$
 $d+1=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L P P

Quindi $\text{Aut}_A(-1) = \ker(A + 1 \cdot I)$ ha dimensione 1, e A non è diagonalizzabile perché $\lambda=-1$ ha mult. alg. 2 e mult. geom. 1