**Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale**

Compito di Geometria – 17 Luglio 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Attenzione:** Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

**Esercizio 1. [7 pt.]**

1. Trovare tutte le soluzioni complesse $z$ della seguente equazione:

$$e^{z-5} + i = 0.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse $z$ della seguente equazione:

$$z^6 + 64 = 0.$$

**Esercizio 2.** **[8 pt.]** Considerare i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3.$$

1. Trovare una base dell'immagine di $f$.
2. Trovare una base del nucleo di $f$.
3. Sia $v = (-1, 1, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$. Determinare il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid f(w) = v \right\} .$$

**Esercizio 3. [10pt.]** Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.

2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.

3. Stabilire se la matrice $A$ è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

**Esercizio 4. [7 pt.]** Sia $A$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ (in partenza ed in arrivo):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trovare la matrice $B$ associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1\}$ (in partenza ed in arrivo).

2. $*$ Trovare tutte le coppie di vettori $\{v_1, v_2\}$ tali che la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo) sia $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.