Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 9 Gennaio 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso di coordinate polari $(\rho, \theta) = (3, \pi/3)$, e sia $w \in \mathbb{C}$ il numero complesso di coordinate polari $(\rho, \theta) = (9, \pi/6)$. Scrivere coordinate polari e coordinate cartesiane del seguente numero complesso, dove $\overline{w}$ denota il coniugato di w:
$$\frac{z^7}{(\overline{w})^3}$$
2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:
$$z^3 = 8.$$

Esercizio 2. [8 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

1. Trovare una base del nucleo di T.
2. Trovare una base dell'immagine di T.
3. Determinare l'insieme:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4 [punti 7]

1. Trovare il vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che:
   - La sua seconda coordinata è uguale -2.
   - $w \in \text{span}\{(1,-3,2),(0,-1,2)\}$
   - Il prodotto scalare tra w e $(1,1,0)$ è uguale a -1.

2. Trovare una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti proprietà:
   - $A \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$.
   - $A \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$.
   - $A \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

[Con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono denotati i tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.]