Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 25 minuti

15 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Proposizione	Vera	Falsa
1) Se A è invertibile e simmetrica allora anche A^{-1} è invertibile e simmetrica.	☒	☐
2) Una matrice quadrata che ha le colonne tutte diverse è invertibile.	☐	☒
3) Per ogni $w \in \mathbb{C}$ non nullo esistono infiniti $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = w$.	☒	☐
4) Se $v \neq 0$ è autovettore della matrice $A \cdot A$ allora v è autovettore anche della matrice A.	☐	☒
5) I vettori $v_1 = (-1, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, -2)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
6) Se $A = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N} \cap [1, 4]\}$ e $B = \{m^2 - 1 \mid m \in \mathbb{N} \cap [1, 4]\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☒	☐
7) La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dove $f(z) = 2\bar{z} + 1$ è biunivoca.	☒	☐
8) Non esistono applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ biunivoche.	☒	☐
9) L'insieme delle matrici anti-simmetriche 3×3 sono un sottospazio vettoriale di dimensione 3.	☒	☐
10) $z = 1 - 3i$ allora $z^2 + 4\bar{z} + 4z = -6i$.	☒	☐
11) Il sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 4 equazioni e 3 incognite è non banale.	☐	☒
12) Se A è simile a B allora A è diagonalizzabile se e solo se B è diagonalizzabile.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

15 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$4\,\overline{z}^3 - z = 0$$

scrivendole sia in forma polare che in forma cartesiana.

SOLUZ.

$4\bar{z}^3 = z \iff (z \neq 0) \quad 4\bar{z}^3 \cdot z^3 = z \cdot z^3 \iff 4(\bar{z}\cdot z)^3 = z^4 \iff$

$4\rho^6 = z^4$ dove $z = (\rho, \theta)$ e quindi $z^4 = (\rho^4, 4\theta)$.

Allora $\begin{cases} 4\rho^6 = \rho^4 \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \quad (\text{o } \rho = 0) \\ 0 = 4\theta + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{k}{2}\pi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \dots \end{cases}$

Le soluzioni sono quindi:

$z_0 = 0 \quad ; \quad z_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} \quad ;$

$z_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} i \quad ; \quad z_3 = \left(\frac{1}{2}, \pi\right) = -\frac{1}{2}$

$z_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2} i$

Esercizio 2. [10 pt.]

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 3kx_3, -x_1 - x_2 + 4x_3, 2x_1 - 2x_3)$$

1. Determinare la matrice associata a f_k.
2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare f_k.
3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_k(x, y, z) = (0, 0, 1)\}.$$

1.) $$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3k \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.) $$\det(A_k) = \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3k & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} = 0 + 16 + 0 - (4 + 0 - 6k) =$$

$$= 16 - 4 + 6k = 6k + 12 \neq 0 \iff k \neq -2$$

Quindi, $\underline{\text{se } k \neq -2}$, A_k è invertibile e

$\dim(\ker A_k) = 0$ e $\dim(\operatorname{Im} A_k) = 3$

Se invece $k = -2$,

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Quindi $\dim(\operatorname{Im} A_{-2}) = 2$ &

$\dim(\ker A_{-2}) = 1$.

3) Se $k \neq -2$, A_k è invertibile,

quindi $A_k \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha una ed una

sola soluzione. Precisamente:

$\vec{x} = A_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo esplicitamente riducendo il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3k & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio I e II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3k & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3k & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3k & 0 \\ 0 & 0 & 6+3k & 1 \end{array}\right).$$

Abbiamo il sistema ridotto:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3k\,x_3 = 0 \\ (6+3k)x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3(2+k)}$$

$$2x_2 = -3k \cdot x_3 = \frac{-3k}{3(2+k)} = -\frac{k}{(2+k)} \Rightarrow x_2 = -\frac{k}{2(2+k)}$$

$$x_1 = -x_2 + 4x_3 = \frac{k}{2(2+k)} + \frac{4}{3(2+k)} = \frac{3k+8}{6(2+k)}$$

Per $k \neq -2$, $S_k = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3k+8}{6(2+k)} \\ \frac{-k}{2(2+k)} \\ \frac{1}{3(2+k)} \end{pmatrix} \right\}$

Se $k=-2$ abbiamo un sistema la cui matrice associata è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione $0=1$ ci dice che in questo caso il sistema è impossibile, e dunque

$$S_{-2} = \emptyset$$

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x, y, z, t) = (4x_1 + 2x_4, 12x_1 - 2x_2 + 8x_4, 15x_1 - 3x_2 + x_3 + 10x_4, -6x_1 - 3x_4)$$

1. Verificare che il vettore $(-1, 2, 1, 2)$ è un autovettore e determinarne l'autovalore.
2. Determinare la matrice A associata a f, il suo polinomio caratteristico e i suoi autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1) $f(-1,2,1,2) = (4(-1)+2(2),\ 12(-1)-2(2)+8\cdot(2),\ 15(-1)-3(2)+1+10(2),\ -6(-1)-3(2))$

$= (0,0,0,0)$. Dunque il vettore considerato e' autovettore di autovalore $\lambda = 0$.

2) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 0 & 8 \\ 15 & -3 & 1 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P_\lambda(A) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 12 & -2-\lambda & 0 & 8 \\ 15 & -3 & 1-\lambda & 10 \\ -6 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} =$$

(sviluppo lungo la III colonna) $= (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 12 & -2-\lambda & 8 \\ -6 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ = (sviluppo lungo la II colonna)

$= (1-\lambda)(-2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -6 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)\left[(4-\lambda)(-3-\lambda)+12\right] =$

$$(\lambda-1)(\lambda+2)\left[\cancel{-1}-4\lambda+3\lambda+\lambda^2+\cancel{1}\right] = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda) =$$

$$\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Autovalori: $\lambda=0$ m.a. 1; $\lambda=1$ m.a. 2;
$\lambda=-2$ m.a. 1.

3) $\lambda=0$

$$A-0\cdot I = A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 0 & 8 \\ 15 & -3 & 1 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto al punto 1) che $A\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
dunque $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ forma una base dell'autospazio $Aut(A,0)$

$\lambda=1$

$$A-1\cdot I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & 0 & 8 \\ 15 & -3 & 0 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+2\text{I}]{\substack{\text{II}-4\text{I} \\ \text{III}-5\text{I}}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Variabili libere x_3 e x_4.

Troviamo le soluzioni speciali.

$x_3=1$ $\quad x_4=0$ $\quad \begin{cases} 3x_1 \quad + 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -3x_2 \quad = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_3=0$ $\quad x_4=1$ $\quad \begin{cases} 3x_1 \quad + 2x_4 = 0 & \Rightarrow 3x_1+2=0 \Rightarrow x_1 = -2/3 \\ -3x_2 \quad = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{s}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2 = \vec{s}_1$ e $\vec{v}_3 = \vec{s}_2$ formano una base dell'autospazio $Aut(A,1)$,
che ha dimensione 2 (m.g.=2)

$\lambda = -2$

$$A+2\cdot I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 8 \\ 15 & -3 & 3 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{III - 5/2\, I \\ IV + I}]{II - 2I} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II e III}]{\text{scambio}} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{IV - \frac{1}{4} III} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

Variabile libera x_3

Pongo $x_3 = 1$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} 6x_1 \quad + 2x_4 = 0 & \Rightarrow 6x_1 + 2\cdot 0 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -3x_2+3x_3+5x_4 = 0 & \Rightarrow -3x_2 + 3 + 5\cdot 0 = 0 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ 4x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forma una base dell'autospazio $Aut(A,-2)$

4) La matrice "cambio di base" $S = \left[v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

è t.c. $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ è diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (1, -1, 0)$ è un autovettore con autovalore 0,
   - Il vettore $v_2 = (0, 0, 1)$ è un autovettore con autovalore -1,
   - Il nucleo di f ha dimensione 2,

   e scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
2. Sia V il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0\}$.
   (a) Trovare una base di V.
   (b) Trovare una base del sottospazio perpendicolare

$$V^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \perp \vec{w} \text{ per ogni } \vec{v} \in V\}.$$

1) $f(v_1) = 0 \cdot v_1 = 0$, quindi $v_1 \in \ker f$ e $f(1,-1,0) = (0,0,0)$

$f(v_2) = -1 \cdot v_2$, quindi $f(0,0,1) = (0,0,-1)$

Completo $\{v_1, v_2\}$ ad una base, ad esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$ e impongo $f(v_3) = 0$.

La matrice B associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e'

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se A e' la matrice associata ad f rispetto alla base canonica,

allora $B = S^{-1} A S$ dove $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e' la matrice cambio di base, dunque:

$$A = S \cdot B \cdot S^{-1}.$$

Calcolando si ottiene che $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$