# Ingegneria Edile-Architettura

## Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

**15 Luglio 2019**

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

**Esercizio 1. [6 pt.]**
Trovare tutte le soluzioni complesse $z$ della seguente equazione:

$$4\,\overline{z}^3 - z = 0$$

**Esercizio 2. [10 pt.]**
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 3kx_3, -x_1 - x_2 + 4x_3, 2x_1 - 2x_3)$$

1. Determinare la matrice associata a $f_k$.
2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $f_k$.
3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_k(x, y, z) = (0, 0, 1)\}.$$

**Esercizio 3. [10 pt.]**

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x, y, z, t) = (4x_1 + 2x_4, 12x_1 - 2x_2 + 8x_4, 15x_1 - 3x_2 + x_3 + 10x_4, -6x_1 - 3x_4)$$

1. Verificare che il vettore $(-1, 2, 1, 2)$ è un autovettore e determinarne l'autovalore.
2. Determinare la matrice $A$ associata a $f$, il suo polinomio caratteristico e i suoi autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile $S$ tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

**Esercizio 4. [6pt.]**

1. Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (1, -1, 0)$ è un autovettore con autovalore 0,
   - Il vettore $v_2 = (0, 0, 1)$ è un autovettore con autovalore $-1$,
   - Il nucleo di $f$ ha dimensione 2,

   e scrivere la matrice $A$ associata a $f$ rispetto alla base canonica.

2. Sia $V$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0\}$.
   (a) Trovare una base di $V$.
   (b) Trovare una base del sottospazio perpendicolare
   $$V^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \perp \vec{w} \text{ per ogni } \vec{v} \in V\}.$$