SOLUZIONI

# Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria - A

Tempo a disposizione: 30 minuti

**28 Gennaio 2019**

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

| **Proposizione** | **Vera** | **Falsa** |
|---|---|---|
| **1)** Se $n \leq m$ allora ogni applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva. | ☐ | ☒ |
| **2)** L'unica soluzione complessa $z$ dell'equazione $e^z = 1$ è $z = 0$. | ☐ | ☒ |
| **3)** Se $z = 2 + i$ allora $(\overline{z} - z)^2 = 4$. | ☐ | ☒ |
| **4)** $(1, -1)$ è un autovettore dell'applicazione lineare $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2)$. | ☒ | ☐ |
| **5)** Se $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n^3 < 50\}$ e $Y = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N}\ 2k = n\}$ allora $X \cap Y = \emptyset$. | ☐ | ☒ |
| **6)** Il vettore $(1, 1, 0)$ appartiene a $\text{Span}\{(1, -3, 2), (4, 0, 1)\}$. | ☐ | ☒ |
| **7)** Se 0 non è un autovalore della matrice quadrata $B$ allora $B$ non è invertibile. | ☐ | ☒ |
| **8)** Se $A$ è diagonalizzabile allora $A$ è invertibile. | ☐ | ☒ |
| **9)** $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y - 2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale. | ☐ | ☒ |
| **10)** Se $v$ e $w$ sono autovettori di una matrice $A$ allora anche $2v + 3w$ è un autovettore. | ☐ | ☒ |

**Esercizio.** [**4 punti**] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

trovare la sua inversa sinistra $B$ che ha tutti zero nella seconda colonna.

**RISPOSTA:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONI

**Ingegneria Edile-Architettura**

Test di Geometria - B

Tempo a disposizione: 30 minuti

**28 Gennaio 2019**

| | | | | | | | | | | | | | | | (Cognome) | | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | | | (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

| **Proposizione** | **Vera** | **Falsa** |
|---|---|---|
| **1)** Se $X = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 < k^3 < 60\}$ e $Y = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N}\ 3k = n\}$ allora $A \cap B = \emptyset$. | ☐ | ☒ |
| **2)** Non ci sono soluzioni complesse $z$ dell'equazione $e^z = -1$. | ☐ | ☒ |
| **3)** $(-1, 1)$ è un autovettore dell'applicazione lineare $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2)$. | ☒ | ☐ |
| **4)** Se $B$ è una matrice invertibile, allora 0 non è un suo autovalore. | ☒ | ☐ |
| **5)** Se $B$ è invertibile allora $B$ è diagonalizzabile. | ☐ | ☒ |
| **6)** Se $v$ e $w$ sono autovettori di autovalore $\lambda$, allora anche $2v + 3w$ è autovettore di autovalore $\lambda$. | ☒ | ☐ |
| **7)** Se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iniettiva, allora $n \leq m$. | ☒ | ☐ |
| **8)** $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$ è un sottospazio vettoriale. | ☐ | ☒ |
| **9)** Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a $\mathrm{Span}\{(1, 2, -3), (4, 1, 0)\}$. | ☐ | ☒ |
| **10)** Se $z = 3 - i$ allora $(\overline{z} + z)^2 = 9$. | ☐ | ☒ |

**Esercizio. [4 punti]** Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

trovare la sua inversa sinistra $A$ che ha tutti zero nella seconda colonna.

**RISPOSTA:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Ingegneria Edile-Architettura

## Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

**28 Gennaio 2019**

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

**Esercizio 1. [6 pt.]**
Trovare tutte le soluzioni complesse $z$ della seguente equazione:

$$z^3 + 36\,\overline{z} = 0$$

$z^3 = -36\overline{z} \iff$ (se $z \neq 0$) $z^4 = -36\,\overline{z}\cdot z = -36|z|^2$

In coordinate polari, $z \rightsquigarrow (\rho, \theta)$ $\quad z^4 \rightsquigarrow (\rho^4, 4\theta)$.

Quindi $z^4 = -36|z|^2 \iff \rho^4 = 36\rho^2$ & $4\theta = \pi + 2k\pi$

(il numero reale negativo $-36|z|^2 \rightsquigarrow (36|z|^2, \pi)$ )

$\Rightarrow \rho = 0$ o $\rho = 6$. & $\theta = \pi/4 + k\,\pi/2 = \pi/4, \ 3/4\pi, \ 5/4\pi, \ 7/4\pi, \dots$

quisiripet

Oltre a $z_0 = 0$, le soluzioni sono:

$z_1 \rightsquigarrow (6, \pi/4) \Rightarrow z_1 = 6\left(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

$z_2 \rightsquigarrow (6, 3/4\pi) \Rightarrow z_2 = 6\left(\cos 3/4\pi + i \sin \tfrac{3\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

$z_3 \rightsquigarrow (6, 5/4\pi) \Rightarrow z_3 = 6\left(\cos 5/4\pi + i \sin 5/4\pi\right) = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$

$z_4 \rightsquigarrow (6, 7/4\pi) \Rightarrow z_4 = 6\left(\cos 7/4\cdot\pi + i \sin 7/4\pi\right) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$

**Esercizio 2.** [10 pt.]
Si consideri il seguente sistema lineare in 4 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} -x-y=-2 \\ x+z+2w=5 \\ 2y+z-w=1 \\ x-2y-3w=-4 \end{cases}$$

1. Si determini la matrice $A$ corrispondente al sistema lineare omogeneo associato.
2. Si determini la dimensione e una base dello spazio delle colonne di $A$.
3. Si determini la dimensione e una base del nucleo di $A$.
4. Trovare tutte le soluzioni $(x, y, z, w)$ del sistema.
5. Trovare un vettore di termini noti $(t_1, t_2, t_3, t_4)$ non nullo e diverso da $(-2, 5, 1, -4)$ per cui il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} -x-y=t_1 \\ x+z+2w=t_2 \\ 2y+z-w=t_3 \\ x-2y-3w=t_4 \end{cases}$$

1) $$A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}+\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-3\text{II}]{\text{III}+2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & +7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} P & P & P & P \end{array}$$

2) 4 colonne pivot, quindi
lo spazio delle colonne ha dimensione 4, ed e' perciò $= \mathbb{R}^4$.
Una base e' data dalle colonne pivot della matrice iniziale,
cioe' $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$, ma anche la base canonica di $\mathbb{R}^4$ va bene.

3) Non ci sono variabili libere, quindi $\ker(A)=\{0\}$

4) Visto che $\ker(A)=\{0\}$, l'appl. lineare corrispondente ad A è iniettiva, e quindi si ha al più una soluzione.
Il sistema ridotto è:

$$\begin{cases} -x-y = -2 \\ -y+z+2w = 3 \\ 3z+3w = 7 \\ -6w = -8 \end{cases}$$

Risolviamo iniziando dal basso, e troviamo:

$-6w=-8 \Rightarrow w = +\frac{4}{3}$

$3z+3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)=7 \Rightarrow 3z+4=7 \Rightarrow 3z=3 \Rightarrow z=1$

$-y+1+2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)=3 \Rightarrow -y+1+\frac{8}{3}=3 \Rightarrow y = 1+\frac{8}{3}-3=\frac{2}{3}$

$-x-\frac{2}{3}=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

L'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

5) Visto che A è $4\times 4$, e che $\ker(A)=\{0\}$ ha dimensione 0 allora l'applicazione lineare $f_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata ad A ha $\dim(\mathrm{Im} f_A)=4$ ed è quindi suriettiva, anzi biunivoca.
Questo significa che per ogni scelta dei termini noti esiste ed unica soluzione del sistema.
Quindi ogni vettore di termini noti $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ha la proprietà richiest

**Esercizio 3.** [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + 6x_2,\ 6x_2,\ -3x_2 - x_3,\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4).$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ della matrice $A$ associata ad $f$ rispetto alla base canonica, e determinare gli autovalori e la loro molteplicità algebrica.

2. Trovare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Trovare, se esiste, una matrice invertibile $S$ e una matrice diagonale $D$ tali che $D = S^{-1}AS$.

1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo secondo l'ultima colonna)

$(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo secondo la 1° colonna)

$= (3-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(6-\lambda)(-1-\lambda)$

$= (\lambda+1)^2(\lambda-3)(\lambda-6)$

$\lambda = -1$ autovalore di m.a. 2

$\lambda = 3$ autovalore di m.a. 1

$\lambda = 6$ autovalore di m.a. 1

2) • Autospazio $\lambda = -1$

$\ker(A+1\cdot I)$. $A+I = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$ scambio I e IV riga

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} - \frac{6}{7}\text{II}]{\text{III} + \frac{3}{7}\text{II}} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix}$$

L'autospazio ha dimensione 2 (molteplicità geom. = 2)

$x_3$ e $x_4$ variabili libere. Troviamo le soluzioni speciali.

$\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$ $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -4x_1 + 0 - 4 + 0 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$

• $\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix}$ $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -4x_1 + 0 - 0 + 4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$

$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Autospazio $\lambda = 3$

$A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ L'ultima colonna è il vettore nullo, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A-3I)$

Visto che la molt. algebrica di $\lambda = 3$ è 1,
la dimensione dell'autospazio è 1, e quindi

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base.

- Autospazio $\lambda = 6$

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II - \frac{4}{7} I} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + \frac{21}{4} II} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -28 & -63/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left( 4 - \frac{4}{7} \cdot 6 = \frac{28-24}{7} = \frac{4}{7} \right)$

$\left( -7 + \frac{21}{\cancel{4}}(-\cancel{4}) = -28 \qquad 0 + \frac{21}{4}(-3) = -\frac{63}{4} \right)$

P P P L

La variabile libera è $x_4$, e poniamo $x_4 = 1$

Il sistema ridotto è
$$\begin{cases} -7x_1 + 6x_2 = 0 \\ \frac{4}{7}x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -28x_3 - 63/4\, x_4 = 0 \end{cases}$$

Cominciando a risolvere dal basso, otteniamo:

$$-28x_3 - 63/4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 28x_3 = -63/4 \Rightarrow x_3 = -\frac{\cancel{63}^{9}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{28}_{4}} = -\frac{9}{16}$$

$$\frac{4}{7}x_2 - \cancel{4} \cdot \left(-\frac{9}{\cancel{16}_{4}}\right) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{4}{7}x_2 = -\frac{9}{4} + 3 \Rightarrow \frac{4}{7}x_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{16}$$

$-7x_1 + \cancel{6}^{3} \cdot \left(\frac{21}{\cancel{16}_{8}}\right) = 0 \Rightarrow 7x_1 = \frac{63}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{8}$

Dunque la soluzione speciale e'
$$\begin{pmatrix} 9/8 \\ 21/16 \\ -9/16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi la seguente base di autovettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=6}{\begin{pmatrix} 9/8 \\ 21/16 \\ -9/16 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

3.) La matrice cambio di base
$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 21/16 \\ 1 & 0 & 0 & -9/16 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' tale che

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e' la matrice diagonale avente gli autovettori sulla diagonale.

**Esercizio 4.** [6pt.]

- Trovare una base del sottospazio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0\}.$$

- Definire un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che sia diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = -1$ e tale che il vettore $(1, 1, 1)$ sia contenuto nell'immagine.

  È possibile definire $T$ in modo che sia suriettiva? (giustificare la risposta).

- $W = \ker(f)$ dove $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e' l'applicazione lineare data $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4$.

La matrice associata ha dimensioni $1 \times 4$ ed e'

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L & L \end{matrix} \end{array}$$

. Quindi $x_2, x_3, x_4$ sono le variabili libere.

Troviamo le soluzioni speciali.

1) $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 - 2 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

2) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 - 0 - 5 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

3) $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 - 0 - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

Quindi $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono le soluzioni speciali, e $B = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$ e' una base di $W$.

- Un modo possibile di definire $T$ è considerare come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e imporre

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>N.B.</u> Se $A$ è la matrice associata a $T$, e se $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice cambio di base, allora $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo modo $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = -1$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2$; e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 0$.

Notiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.

---

Visto che $\lambda = 0$ è un autovalore, $\ker T$ è NON BANALE, quindi $\dim(\ker T) \geq 1$. Ma $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e allora $\dim(\operatorname{Im} T) \leq 2$ e $T$ <u>NON</u> può essere suriettiva.

In generale, si ha che se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare ha $\lambda = 0$ come autovalore, allora $f$ NON è suriettiva.