SOLUZIONI

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria - A

Tempo a disposizione: 30 minuti

7 Gennaio 2019

| | | | | | | | | | | | | | | |
(Cognome)

| | | | | | | | | |
(Nome)

| | | | | | |
(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) $(-i)^{2013} = -i$.	☒	☐
2) Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è un'appl. lineare allora f non è iniettiva.	☒	☐
3) L'angolo formato dai vettori $v_1 = (1, 2, -3)$ e $v_2 = (-2, 1, 2)$ è acuto.	☐	☒
4) Se due matrici hanno lo stesso determinante allora sono simili.	☐	☒
5) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$ allora $(v_1 + v_2) \perp w$.	☒	☐
6) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 < 28\}$ e $B = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N}\ 3k + 2 = n\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☒
7) L'equazione $e^z = -3$ non ha soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$.	☐	☒
8) Se v_1 e v_2 sono autovettori della matrice A, anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di A.	☐	☒
9) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^5$ sono sottospazi di dimensione 3 allora $\dim(V \cap W) \geq 1$.	☒	☐
10) Quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.	☐	☒

Esercizio. [4 punti] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella seconda riga.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

SOLUZIONI

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria - B

Tempo a disposizione: 30 minuti

7 Gennaio 2019

| | | | | | | | | | | | | | | | (Cognome) | | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | | (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Proposizione	Vera	Falsa
1) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^7$ sono sottospazi di dimensione 3 allora $\dim(V \cap W) \geq 1$.	☐	☒
2) Se due matrici sono simili allora hanno lo stesso determinante.	☒	☐
3) Quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono un insieme di generatori.	☐	☒
4) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 < 23\}$ e $B = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N}\ 3k+1 = n\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☒
5) L'angolo formato dai vettori $v_1 = (-1, 2, -3)$ e $v_2 = (2, 1, -2)$ è acuto.	☒	☐
6) $(-i)^{2015} = -i$.	☐	☒
7) Se $v \perp w_1$ e $v \perp w_2$ allora $v \perp (w_1 + w_2)$.	☒	☐
8) Se v è un autovettore della matrice A, anche $2v$ è un autovettore di A.	☒	☐
9) L'equazione $e^z = 3$ ha infinite soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$.	☒	☐
10) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è un'appl. lineare allora f non è suriettiva.	☒	☐

Esercizio. [4 punti] Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

trovare la sua inversa destra B che ha tutti zero nella seconda riga.

RISPOSTA:

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

7 Gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{3z} - e^{\overline{z}+2} = 0.$$

$z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$

$e^{3z} = e^{3a+3ib}$; $e^{\overline{z}+2} = e^{a+2-ib}$

$e^{3z} = e^{\overline{z}+2} \iff e^{3a} = e^{a+2}$ & $3b = -b + 2k\pi$

$3a = a + 2 \Rightarrow a = 1$; $4b = 2k\pi \Rightarrow b = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Soluzioni: $S = \{ 1 + k\frac{\pi}{2} i \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Esercizio 2. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5, x_3 + 4x_4 - 3x_5, x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5).$$

(a) Si determini la dimensione e una base dell'immagine di f.

(b) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f.

(c) Trovare l'insieme di tutti vettori $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ tali che $f(v) = (3, 1, 2)$.

La matrice associata è

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III - I} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{III + II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} P & L & P & L & L \end{array}$$

(a) Ci sono 2 colonne pivot, quindi $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.
Una base è data dalle colonne I e III della matrice iniziale, cioè

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Ci sono 3 variabili libere, quindi $\dim(\ker(f)) = 3$.
Il sistema omogeneo associato, in forma ridotta, è

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Le variabili libere sono x_2, x_4, x_5.

Soluzioni speciali:

① $x_2 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.$

$$\begin{cases} x_1 + 3 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3 \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② $x_2 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0.$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 6 = 0 & \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_3 + 4 = 0 & \Rightarrow x_3 = -4 \end{cases} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ $x_2 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 4 = 0 & \Rightarrow x_1 = +1 \\ x_3 - 3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 3 \end{cases} \qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base del nucleo è $\mathcal{B} = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3 \}$

(c) Una soluzione particolare si ottiene ponendo le variabili libere $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 3 & \Rightarrow x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 & \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$

$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare $f(\vec{x}_p) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

L'insieme di tutte le soluzioni è $\mathcal{S} = \{ \vec{x}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker f \}$

$$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3. **[10 pt.]**
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

1 $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo secondo la IV riga)

$(3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo secondo la III colonna)

$= (3-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) =$

$= (3-\lambda)(1-\lambda)^2(2-\lambda)$

$\lambda = 3$ m.a. 1

$\lambda = 1$ m.a. 2

$\lambda = 2$ m.a. 1

(2) $\lambda = 3$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + I} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 10 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 5 \cdot II}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array}$$

Pongo la variabile libera $x_4 = 1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_2 - 6x_4 = 0 \\ -2x_3 - 25x_4 = 0 \end{cases}$$

$-2x_3 - 25 = 0 \Rightarrow x_3 = -25/2$

$-2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$

$-x_1 - 15 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -14$

Una base dell'autospazio $Aut(A, 3)$ e' $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ -3 \\ -25/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = 1$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + 1/3\, III]{III + 1/2\, II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} P & L & L & P \end{array}$$

Ci sono due variabili libere, quindi $\dim(Aut(A, 1)) = 2$.

Troviamo una base.

Nel sistema ridotto
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_4 = 0 \\ -6x_4 = 0 \end{cases}$$
le variabili libere sono x_2 e x_3.

$x_2 = 1$
$x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 5 - x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = -5 \\ -6x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -6x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dell'autospazio $Aut(A, 1)$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III e I}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}+5\,\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+29\,\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

Nel sistema ridotto, pongo la variabile libera $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -x_2 - 6x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ -29x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una base di $Aut(A, 2)$ è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

③ La matrice è diagonalizzabile perché esiste una base di autovettori, cioè

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ -3 \\ -25/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda = 3$ $\quad\lambda = 1$ $\quad\lambda = 1$ $\quad\lambda = 2$

Se prendiamo la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} -14 & -5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -25/2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonale degli autovalori $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si ha che $S^{-1} A S = D$.

Si può calcolare $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & -33/2 \\ 1 & 5 & 0 & 29 \end{pmatrix}$,

ma non è necessario ai fini di questo esercizio.

Esercizio 4. [6pt.]

- Trovare una base del sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0\}$.
- Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(f) = \mathrm{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.

- Il sottospazio V e' $V = \ker(f)$ dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e' l'applicazione lineare $f(x,y,z) = 2x - 5y + z$.

La matrice associata e' $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & \;\; L & \;\; L \end{matrix} \end{array}$

Troviamo le soluzioni speciali.

$\begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \qquad 2x - 5y + z = 0 \Rightarrow x = 5/2 \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} y=0 \\ z=1 \end{matrix} \qquad 2x - 5y + z = 0 \Rightarrow x = -1/2 \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di V.

- Una base di $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ e' $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Completo ad una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Un'appl. lineare e' determinata dai suoi valori su una base, quindi posso definire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ponendo:

$$f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad e \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

In questo modo $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\in \ker f$ e $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\in \operatorname{Im} f$

Visto che $\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{Im} f)=2$, deve essere

$\dim(\ker f)=1$ e quindi $\ker f=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ e

$\dim(\operatorname{Im} f)=1$ e quindi $\operatorname{Im} f=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$, come voluto

La matrice associata ad f rispetto alla base

$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è $\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

perché $f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Se A è la matrice associata ad f rispetto alla base canonica, allora sappiamo che $B=S^{-1}AS$ dove

$S=\begin{pmatrix}-2&0\\3&1\end{pmatrix}$ è la matrice cambio di base.

Dunque $A=SBS^{-1}$.

Calcolando si ottiene $A=\begin{pmatrix}-3&-2\\ 9/2&3\end{pmatrix}$.