Appello di Algebra Lineare
06 Giugno 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Siano $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ generati da v_1, v_2 e da w_1, w_2 rispettivamente.

(1) Calcolare le dimensioni di V e di W.
(2) Trovare una base di $V \cap W$.
(3) Decidere se è possibile trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ **diverso da 0** e ortogonale a $\mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$ oppure no.

Per la (3), scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta sul foglio.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2z \\ y - kx \\ z - 2y \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(1) Per quali valori di k si ha $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \{0\}$?
(2) Esiste un valore di k per cui $\mathrm{Im}(\phi)$ ha dimensione 1 oppure no?
(3) Calcolare la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in partenza e la base standard (canonica) in arrivo.

Per la (2), scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta sul foglio.

Risposta (1)

Risposta (2)

Risposta (3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Dire se F è diagonalizzabile.

(2) Indicare tutti gli autovettori di F del tipo $\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Per la (1), scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta sul foglio.

Risposta (2)

Risposta (1)

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 2, e sia $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la trasformazione lineare che manda il polinomio $p(x)$ in $p(1)x - p(0)$.

(1) Si calcoli la matrice di T nella base ordinata $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
(2) Si calcoli la matrice di $T \circ T$ nella base ordinata $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
(3) Si calcoli il determinante di $T \circ T \circ T \circ T \circ T$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Risposte Esercizio 1.

(1) Si osserva immediatamente che v_1 e v_2 sono indipendenti (perché non sono proporzionali) e $w_1 = -2w_2$. Quindi dim $V = 2$ e dim $W = 1$.

(2) Dalla (1) segue che $\{w_2\}$ è una base di W, dunque se w_2 non è contenuto in V, abbiamo $V \cap W = \{0\}$. Altrimenti $W \subseteq V$, dunque $W \cap V = W$ e quindi $\{w_2\}$ è una sua base di $W \cap V$. Si osserva che $v_1 + v_2 = w_2$, quindi $w_2 \in V$ e siamo effettivamente in quest'ultimo caso. Alternativamente, si può verificare usando l'algoritmo di Gauss che v_1, v_2, w_2 sono linearmente dipendenti, e siccome v_1 e v_2 sono indipendenti, questo è possibile solo se $w_2 \in V$. Risposta finale: $\{w_2\}$.

(3) Dalla (2) segue che $W \subseteq V$, dunque $\text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2) = V$ che ha dimensione 2, quindi il suo sottospazio ortogonale ha dimensione $3-2 = 1$. (Si può anche calcolare dim $\text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \dim V + W = 2$ con la formula di Grassmann.) La risposta è dunque SI.

Risposte Esercizio 2.

(1) Dalle equazioni $x - 2z = 0$ e $z - 2y = 0$ risulta che gli elementi di $\text{Ker}(\phi)$ soddisfanno $x = 2z$ e $z = 2y$, e quindi anche $x = 4y$. Quindi per $k = 1/4$ gli elementi di $\text{Ker}(\phi)$ sono i vettori con $x = 4y = 2z$; questo è uno spazio di dimensione 1. Se invece $k \neq 1/4$, le equazioni $x = 4y$ e $x - ky = 0$ sono soddisfatte solo per $x = y = 0$; in questo caso $x = 2z$ implica anche $z = 0$, quindi $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$. Risposta finale: solo per $k = 1/4$.

(2) Nel punto (1) abbiamo visto che $\text{Ker}(\phi)$ può avere solo dimensione 1 o 0, quindi $\text{Im}(\phi)$ può avere solo dimensione $3 - 1 = 2$ o $3 - 0 = 3$. Quindi $\text{Im}(\phi)$ NON può avere dimensione 1.

(3) Le colonne della matrice cercata sono $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$, $\phi(v_3)$. Quindi la matrice cercata è:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1-k & 1-2k & k \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Risposte Esercizio 3.

(1) Il polinomio caratteristico di F è $(4-t)(3-t)^2$, quindi la matrice è diagonalizzabile se e solo se l'autovalore 3, la cui la molteplicità algebrica è 2, ha anche molteplicità geometrica 2. Si calcola che gli autovettori (x, y, z) di 3 soddisfanno $y = 0$ e $x = -z$, quindi formano un autospazio di dimensione 1. La risposta è NO.

(2) Siccome gli autovettori di 3 soddisfanno $y = 0$, tra loro non c'è nessuno della forma richiesta. Quelli di 4 invece soddisfanno $x = 6y = -6z$, quindi $(12, 2, -2)$ è l'unico del tipo richiesto.

Risposte Esercizio 4.

(1) Per $p = 1$ si ha $p(1)x - p(0) = x - 1$ e per $p = x$ o $p = x^2$ si ha $p(1)x - p(0) = x$. Quindi la matrice richiesta è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) La matrice di $T \circ T$ è $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) Si ha $\det(A) = 0$ e il determinante cercato è il determinante di A^5. Quindi anche quello è 0.