7 Sett. 2021 – ALGEBRA LINEARE

Es. 1/

$$\begin{cases} \quad\quad 3x_2 - 2x_3 = a \\ -2x_1 - kx_2 \quad\quad = b \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & a \\ -2 & -k & 0 & b \\ 2 & 1 & -2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & c \\ -2 & -k & 0 & b \\ 0 & 3 & -2 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & c \\ 0 & -k+1 & -2 & b+c \\ 0 & 3 & -2 & a \end{array}\right)$$

Quando $-k+1=3$, cioè quando $k=-2$,

il sistema omogeneo dove $a=b=c=0$

ha le ultime due righe uguali e la riduzione

di Gauss si conclude con la matrice:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} c \\ b+c \\ a-b-c \end{array} \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Visto che c'è una variabile libera, il sistema omogeneo in questo caso $k=-2$ ha infinite soluzioni.

Quando invece $k \neq -2$, la riduzione mostra che ci sono 3 pivot e nessuna colonna libera.

In questo caso il sistema ha sempre soluzione, per ogni scelta dei termini noti.

Per $k=-2$, la riduzione del sistema completo e'

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & -2 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c \end{array}\right)$$

. Dunque il sistema NON ha sempre soluzione; precisamente NON ha soluzione quando i termini noti soddisfano la relazione $a-b-c \neq 0$.

Un modo equivalente per raggiungere la stessa conclusione e' il seguente. Il sistema lineare corrisponde ad un'appl. lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e la risolubilità per ogni scelta dei termini noti equivale alla proprietà di T suriettiva.

Ma $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ A.L. e' suriettiva $\iff$

T e' iniettiva $\iff$ NON ci sono variabili libere

$\iff$ $k \neq -2$.

Quando $k = b = 1$ e $c = 3$, la riduzione della matrice del

sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & a \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = a \end{cases}$$

da cui si ottiene subito $x_3 = -2$.

Ex. 2

$$V = \{ f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \mid f(0) = 0 \}$$
$$W = \{ f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \mid f(0) = f(1) \}$$

dove $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ e' lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3.

Un polinomio $f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ appartiene a V $\iff$ $f(0) = d = 0$.

Quindi $V = \{ aX^3 + bX^2 + cX \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$ e' isomorfo ad $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ed ha dimensione 3.

Un polinomio $f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ appartiene a $W \iff f(0) = d = f(1) = a + b + c + d \iff$ $a + b + c = 0$.

Quindi W e' isomorfo al seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \; a + b + c = 0 \right\}$$

Scansionato con CamScanner

Notiamo che $W' = \ker T$ dove

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e' l'A.L. tale che $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a+b+c$

Chiaramente $\mathrm{Im}(T)$ ha dimensione 1, quindi $W' = \ker T$ ha dimensione 3.

Lo spazio $V \cap W$ e' isomorfo al seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a+b+c = 0 \right\}$$

che ha dimensione 2 (e' un piano di $\mathbb{R}^3$).

Scansionato con CamScanner

Ex. 3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ A.L.

Visto che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker f$, si ha $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Troviamo ora la matrice associata ad f.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, come abbiamo già notato.

Inoltre, affinché risulti $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

deve essere $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ per un opportuno $k \neq 0$

Sappiamo che $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 2.$

Quindi la matrice associata ad f (rispetto alla base canonica) è

$$A = \left[f(e_1) \,\vdots\, f(e_2) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$$

Quindi c'è un unico autovalore $\underline{\lambda = 0}$

Ex. 4 $\quad T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

La matrice associata a T e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppando secondo la prima riga si ottiene che

$$\det A = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Quindi A e' invertibile e $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 4$.

La matrice associata a $T - I$ e'

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

Abbiamo 3 pivot, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T - I)) = 3$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppo lungo la I riga) $= (-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$-1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

posizione dispari

$$= (-\lambda)(-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - 1\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1).$$

Quindi gli autovalori sono

$\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$, $\lambda = -i$.

T **NON** e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perche' non tutti i suoi autovalori sono reali.

T e' diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ perche' ha 4 autovalori distinti (e per ognuno di loro, m.a. = m.g. = 1)