

2021-09-07

1. Sistema lineare

Si consideri il seguente sistema lineare dove k, a, b, c sono numeri reali:

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = a \\ -2x_1 - kx_2 = b \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = c \end{cases}$$

- (a) Per quale valore del parametro k il sistema omogeneo associato ha infinite soluzioni? Risposta:
- (b) Per quale valore del parametro k il sistema NON ha sempre soluzione per ogni scelta dei termini noti a, b, c ? (Cioè esistono opportuni termini noti a, b, c per i quali il sistema non ha soluzione) Risposta:
- (c) Quando $k = b = 1$ e $c = 3$, quanto vale la soluzione x_3 del sistema? Risposta:

2. Sottospazi

Nello spazio $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi reali di grado ≤ 3 si considerino i sottospazi

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : f(0) = 0\}, \quad W = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : f(0) = f(1)\}.$$

- (a) Qual è la dimensione di V ? Risposta:
- (b) Qual è la dimensione di $V \cap W$? Risposta:
- (c) Qual è la dimensione di W ? Risposta:

3. Applicazione lineare

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\ker(f) = \text{Imm}(f) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Trovare i numeri reali a e b tali che $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Risposta: $a =$

$$\boxed{6 \quad \checkmark}, b = \boxed{0 \quad \checkmark}.$$

(b) Quanti sono gli autovalori DISTINTI di f ? Risposta: $\boxed{1 \quad \checkmark}$

4. Autovettori

Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare "shift" che sposta in avanti di un posto le coordinate e mette l'ultima al primo posto, cioè:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Qual è la dimensione dell'immagine di T ? Risposta: $\boxed{4 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione dell'immagine di $T - I$? (Qui I è l'applicazione identità.) Risposta: $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(c) T è diagonalizzabile su \mathbb{R} ?

Sì
No \checkmark

(d) T è diagonalizzabile su \mathbb{C} ?

Sì \checkmark
No