2021-06-29

1. **Span**

   Si considerino i vettori

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   di $\mathbb{R}^3$. Determinare i parametri a e b in tal modo che il vettore

   $$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sia contenuto nel sottospazio $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ ed il suo prodotto scalare con v_3 sia uguale a 1. Risposta: $a = \boxed{4 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{-3 \quad \checkmark}$

2. **Span**

   Si considerino i vettori

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   di $\mathbb{R}^3$. Determinare i parametri a e b in tal modo che il vettore

   $$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sia contenuto nel sottospazio $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ ed il suo prodotto scalare con v_3 sia uguale a -2. Risposta: $a = \boxed{-2 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{3 \quad \checkmark}$

3. **Sottospazi**

   Sia $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 3×3 reali. Sia V il sottospazio delle matrici diagonali e W il sottospazio delle matrici da cui la prima riga è uguale alla seconda. [Esempio di tale matrice:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.]$$

(a) Qual è la dimensione di V? Risposta: $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di W? Risposta: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

(c) Qual è la dimensione di $V + W$? Risposta: $\boxed{8 \quad \checkmark}$

4. **Sottospazi**

Sia $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 3×3 reali. Sia V il sottospazio delle matrici diagonali e W il sottospazio delle matrici da cui tutte le righe sono uguali. [Esempio di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.]$$

(a) Qual è la dimensione di V? Risposta: $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di W? Risposta: $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(c) Qual è la dimensione di $V + W$? Risposta: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

5. **Matrice**

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2, sia $\mathcal{B} = (v, w)$ una base di V e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(v) = -2w$ e $f(w) = 3v$.

(a) Se A è la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$, quanto vale il determinante di A? Risposta: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

(b) Quanti sono gli autovalori distinti dell'applicazione composta $f \circ f$? Risposta: $\boxed{1 \quad \checkmark}$

(c) L'applicazione lineare $f \circ f$ è diagonalizzabile?

Sì ✓
No

6. **Matrice**

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2, sia $\mathcal{B} = (v, w)$ una base di V e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(v) = -w$ e $f(w) = 7v$.

(a) Se A è la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$, quanto vale il determinante di A? Risposta: $\boxed{7 \quad \checkmark}$

(b) Quanti sono gli autovalori distinti dell'applicazione composta $f \circ f$? Risposta: $\boxed{1 \quad \checkmark}$

(c) L'applicazione lineare $f \circ f$ è diagonalizzabile?

Sì	✓
No	

7. **Diagonalizzabile**

Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & k+1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A NON è diagonalizzabile? $\boxed{0 \quad \checkmark}$

(b) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A ha un autospazio di dimensione 2? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

8. **Diagonalizzabile**

Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & k+2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A NON è diagonalizzabile? $\boxed{1 \quad \checkmark}$

(b) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A ha un autospazio di dimensione 2? $\boxed{1 \quad \checkmark}$

9. **Nucleo**

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi reali di grado al più 2 e $F, G, F + G : V \to V$ le applicazioni lineari definite da

$$F(p(x)) = 2p(x), \quad G(p(x)) = p'(x), \quad (F+G)(p(x)) = 2p(x) + p'(x)$$

dove $p'(x)$ è la derivata in x del polinomio $p(x)$.

(a) Qual è la dimensione di $\mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)$? Risposta: $\boxed{1 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di $\mathrm{Ker}(F+G)$? Risposta: $\boxed{0 \quad \checkmark}$

10. **Nucleo**

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi reali di grado al più 2 e $F, G, F+G : V \to V$ le applicazioni lineari definite da

$$F(p(x)) = 2p(x), \quad G(p(x)) = p'(x), \quad (F+G)(p(x)) = 2p(x) + p'(x)$$

dove $p'(x)$ è la derivata in x del polinomio $p(x)$.

(a) Qual è la dimensione di $\mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G)$? Risposta: $\boxed{2 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di $\mathrm{Im}(F+G)$? Risposta: $\boxed{3 \quad \checkmark}$