2021-06-01

1. **Sottospazio**

   Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Possiamo affermare che $v_5 \in \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

Sì ✓
No

   (b) Possiamo affermare che v_5 si scrive in modo unico come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4?

Sì
No ✓

   (c) Possiamo affermare che $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathbb{R}^4$?

Sì
No ✓

2. **Sottospazio**

   Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Possiamo affermare che $v_1 \in \text{Span}(v_2, v_3, v_4, v_5)$?

Sì ✓
No

   (b) Possiamo affermare che v_1 si scrive in modo unico come combinazione lineare di v_2, v_3, v_4, v_5?

Sì
No ✓

   (c) Possiamo affermare che $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \neq \mathbb{R}^4$?

Sì ✓
No

3. **Dimensione**

Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali:

$$U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}),$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b + c - d = 0 \right\}.$$

(a) Qual è la dimensione di U? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di W? $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(c) Qual è la dimensione di $U + W$? $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(d) Qual è la dimensione di $U \cap W$? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

4. **Dimensione**

Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali:

$$U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}),$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b + c - d = 0 \right\}.$$

(a) Qual è la dimensione di U? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

(b) Qual è la dimensione di W? $\boxed{3 \quad \checkmark}$

(c) Qual è la dimensione di $U + W$? $\boxed{4 \quad \checkmark}$

(d) Qual è la dimensione di $U \cap W$? $\boxed{1 \quad \checkmark}$

5. **Rango**

Consideriamo l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx_1 - kx_2 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ kx_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro. Sia A la matrice associata rispetto alla base standard.

(a) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A NON è invertibile? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

(b) Al variare di k quanti sono i valori possibili per il rango di A? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

6. **Rango**

Consideriamo l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx_1 - kx_2 \\ 5x_2 + 5x_3 \\ kx_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro. Sia A la matrice associata rispetto alla base standard.

(a) Quanti sono i valori di k per quali la matrice A NON è invertibile? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

(b) Al variare di k quanti sono i valori possibili per il rango di A? $\boxed{2 \quad \checkmark}$

7. **Autovettori**

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali fra le seguenti matrici hanno un autovettore in comune con A.

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sì ✓
No

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sì ✓
No

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sì
No ✓

8. **Autovettori**

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali fra le seguenti matrici hanno un autovettore in comune con A.

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sì
No ✓

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sì ✓
No

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sì ✓
No

9. **Ortogonale**

   Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si trovino numeri reali a e b tali che

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 14 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

   sia una base ortogonale di V. Risposta: $a = \boxed{4 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{-10 \quad \checkmark}$

10. **Ortogonale**

    Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si trovino numeri reali a e b tali che

    $$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

    sia una base ortogonale di V. Risposta: $a = \boxed{-3 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{2 \quad \checkmark}$