SOLUZIONI TEST SCRITTO 4|5|2021

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ applic. lineare t.c.

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker f$

Trovare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

SOLUZ. Sappiamo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Visto che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base, l'appl. lineare f e' univocamente determinata da quei valori.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$, quindi possiamo trovare λ_1 e λ_2 tali che $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, cioe' $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{cases}$

Si vede facilmente che quel sistema ha come unica soluzione $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora $f\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = f\left(-3\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = -3\cdot f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} =$

$= -3\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$ //

(2) Supponiamo che la matrice A $n\times n$ sia tale che $A\cdot A = 0$

(a) Possiamo concludere che A e' la matrice nulla?

No Ad esempio se $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ allora $A\cdot A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

(b) Se $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' l'A.L. associata ad A, possiamo concludere che $\mathrm{Im}(f_A) \subseteq \ker(f_A)$?

Si Notiamo che $A\cdot A$ e' la matrice associata a $f_A \circ f_A$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n$. Sappiamo che per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$f_A(f_A(\vec{v})) = \vec{0}$, quindi $f_A(\vec{v}) \in \ker f_A$.

Allora $\mathrm{Im} f_A = \{ f_A(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \ker f_A$.

Allora Im f_A = … $_A$ …

(c) Possiamo concludere che $\lambda = 0$ e' un autovalore di A ?

Sì. A non e' invertibile, altrimenti anche $A \cdot A$ sarebbe invertibile.
Visto che A e' quadrata, necessariamente $\operatorname{Ker} f_A \neq \{0\}$.
Questo significa che esistono vettori $\vec{v} \neq 0$ t.c. $f_A(\vec{v}) = 0$,
e quindi $\lambda = 0$ e' un autovalore.

Ricordare che $\lambda = 0$ e' autovalore di una matrice quadrata B se e solo se B non e' invertibile

(d) Possiamo concludere che A e' diagonalizzabile ?

NO. Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ma A non e' diagonalizzabile. Verifichiamolo:

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \Rightarrow$ $\lambda = 0$ autovalore di m.a. 2

$\operatorname{Aut}_A(0) = \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha dimensione 1, quindi la m.g. dell'autovalore $\lambda = 0$ è 1, ed è quindi diversa dalla m.a. Per questo A non è diagonalizzabile.

//

(3) Sia $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali.

Sia $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'appl. lineare definita da

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a+c \\ a+c & a+b \end{bmatrix}$$

(a) Qual è la dimensione di $\operatorname{Im} f$?

A meno di isomorfismi, possiamo identificare lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$, facendo corrispondere ad ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Quindi f può essere identificata con l'appl. lineare

$\tilde{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove $\tilde{f}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ \dots \end{pmatrix}$ la cui matrice associata è:

$\tilde{f}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove $\tilde{f}\begin{pmatrix} \vdots \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$, …

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la riduzione di Gauss si vede che A ha due colonne pivot, e quindi $\dim(\mathrm{Im}\,\tilde{f}) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-I \\ IV-I}]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

(b) Esiste un sottospazio $V \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ di dimensione 3 tale che $V \cap \ker f = \{0\}$?

NO Infatti $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ e per il Teorema di Grassman:

$$\dim(V) + \dim(\ker f) - \dim(V \cap \ker f) =$$

$$= \dim \left(V + (\ker f) \right) \leq 4 \implies$$

$$\dim (V \cap \ker f) \geqslant \dim(V) + \dim(\ker f) - 4 = 1$$

Ricordare che in generale vale questa proprietà:

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, e se W_1 e W_2 sono due sottospazi di dimensione k_1 e k_2 allora $\dim (W_1 \cap W_2) \geqslant n - k_1 - k_2$

—//—

(4) Consideriamo la seguente matrice reale, dove k è un parametro:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & k & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 3k & 1 & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Per quale valore di k la matrice A ammette

- $\lambda = 2$ come autovalore, e
- ha un autospazio di dimensione 2.

(b) Per quale valore di k la matrice A ammette

- $\lambda = 2$ come autovalore, e
- solo autospazi di dimensione 1.

<u>SOLUZ.</u> Calcoliamo il polinomio caratteristico di A.

sviluppo lungo l'ultima riga

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & k & 0 & 5 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & -5 \\ 3k & 1 & 2k-\lambda & -k \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & k & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 3k & 1 & 2k-\lambda \end{pmatrix}$$

sviluppo lungo l'ultima colonna

$$= (3-\lambda)\cdot(2k-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & k \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2k)\left((4-\lambda)(1-\lambda)+k\right) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2k)(\lambda^2-5\lambda+4+k).$$

$\lambda = 2$ è autovalore $\Longleftrightarrow$ $2-2k=0$, cioè $k=1$; oppure se $2^2-5\cdot 2+4+k=0$, cioè $k=2$

$k=1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

In questo caso $P_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+5)$

Gli autovalori: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2}$ $\nearrow \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\searrow \lambda_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

sono a due a due distinti e tutti di m.a. $= 1$,

quindi i corrispondenti autospazi hanno dimensione 1.

In questo caso la matrice e' diagonalizzabile

$k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

In questo caso $P_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-4)\underbrace{(\lambda^2-5\lambda+6)}_{(\lambda-3)(\lambda-2)} = (\lambda-3)^2(\lambda-4)(\lambda-2)$

L'autovalore $\lambda = 3$ ha m.a. 2, mentre gli autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 2$ hanno m.a. $= 1$.

L'autospazio dell'autovalore $\lambda = 3$:

$$Aut_A(3) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha dimensione 2.

In ... $A - 3I$ ha due variabili

Infatti la riduzione di Gauss mostra che $A-3I$ ha due variabili libere;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-6\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 1 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Riassumendo:

(a) Per $k=2$, la matrice A ha $\lambda=2$ come autovalore ed ha un autospazio di dimensione 2 (precisamente, l'autospazio dell'autovalore $\lambda=3$)

(b) Per $k=1$, la matrice A ha $\lambda=2$ come autovalore ed ha tutti gli autospazi di dimensione 1.

//

(5) Considerare i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right. \ldots$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}$$

(a) Qual è la dimensione di $W_1 \cap W_2$?

Notiamo che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Effettuo la riduzione di Gauss della matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}.$$

Ci sono 2 variabili libere.

Dunque $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(\ker A) = 2$

(b) Qual è la dimensione di $W_1 + (W_2)^\perp$?

È immediato vedere che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W_1 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$

quindi $W_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}^\perp \Rightarrow W_1^\perp = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$.

Analogamente, $W_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\}^\perp$ e quindi $W_2^\perp = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$.

(Ricordiamo che per ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ si ha $(V^\perp)^\perp = V$)

Per la formula di Grassman:

$$\boxed{\dim(W_1 + W_2^\perp) = \dim W_1 + \dim(W_2^\perp) - \dim(W_1 \cap W_2^\perp)}$$

Abbiamo visto a lezione che se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(V) = k$, allora $\dim(V^\perp) = n-k$.

Quindi $\dim W_1 = \dim\left(\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}^\perp\right) = 4-1=3$.

Inoltre $\dim(W_2^\perp) = \dim\left(\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\}\right) = 1$.

Infine un generico vettore di $W_2^\perp$ è $\vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-2\lambda\\-3\lambda\\-4\lambda\end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

e $v \in W_1 \iff \lambda + 2(-2\lambda) + 3(-3\lambda) + 4(-4\lambda) = 0 \iff$

$\lambda - 4\lambda - 9\lambda - 16\lambda = -28\lambda = 0 \iff \lambda = 0.$

Dunque $W_2^{\perp} \cap W_1 = \{0\}$ e' un sottospazio di dimensione 0.

Concludiamo che $\dim(W_1 + W_2^{\perp}) = 3 + 1 - 0 = 4$,

e quindi $W_2^{\perp} + W_1 = \mathbb{R}^4$.