ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 5

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: May 12, 2024

Buoni ordini e ordinali

1. Buoni ordini

Ci concentriamo ora sullo studio degli insiemi bene ordinati. Si tratta di un tipo speciale di insiemi ordinati che in un senso preciso generalizzano l'insieme dei numeri naturali. L'intuizione è questa: così come i numeri naturali si ottengono a partire dall'elemento minimo 0 applicando un numero finito di volte la funzione successore $S(n) = n + 1$, così gli elementi di un insieme bene ordinato si ottengono a partire dal suo elemento minimo, applicando un numero "transfinito" di volte la funzione successore.

Ad esempio, applicando infinite volte la funzione successore all'elemento 0, si può pensare di ottenere un nuovo elemento $\star$, che sta dopo tutti i numeri naturali (in un certo senso, $\star$ è il successore dell'insieme di tutti i numeri naturali). Se iteriamo poi l'applicazione della funzione successore anche a $\star$, si ottiene il seguente insieme *bene ordinato*:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < n+1 < \ldots < \star < \star+1 < \ldots < \star+n < \star+n+1 < \ldots$$

Possiamo poi andare avanti con questa procedura, ed ottenere un nuovo elemento $\star'$ che sta dopo tutti gli elementi di sopra, poi considerare $\star'+1 < \star'+2 < \ldots$ e così via. L'intuizione è che in questo modo si ottengano (a meno di isomorfismo) tutti gli insiemi bene ordinati.

Come è evidente, le considerazioni fatte sopra sono del tutto informali; dobbiamo ora dare definizioni precise e rigorose che catturino quelle intuizioni. La proprietà fondamentale dei numeri naturali è l'*induzione* o, equivalentemente, il *principio del minimo*: "ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali, ammette minimo". Useremo proprio quest'ultima proprietà per definire i bene ordinati.

Definizione 1.1. Un insieme ordinato $(A, <)$ si dice *bene ordinato* se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha minimo.

Osserviamo che gli insiemi ordinati introdotti informalmente sopra, sono in effetti bene ordinati.

Una prima immediata proprietà degli insiemi bene ordinati è che ogni elemento (tranne l'eventuale massimo) ha un successore immediato.

Definizione 1.2. Sia $(A, <)$ un insieme bene ordinato, e sia $a \in A$. Se a non è il massimo di A, il *successore* di a è l'elemento $a^+ = \min\{a' \in A \mid a' > a\}$.

Quando ciò non determina confusione, il successore di un elemento a si denota anche scrivendo $a + 1$.

Esercizio 1.3. Dimostrare che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è bene ordinato con l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$, allora $|A| \leq \aleph_0$.

Esempio 1.4. Ogni insieme ordinato con dominio finito è bene ordinato, perché ogni suo sottoinsieme è finito e dunque ha minimo (e massimo).[1]

Insiemi ordinati finiti con lo stesso numero di elementi sono tra loro isomorfi. (In realtà abbiamo già visto questa proprietà nell'Esercizio **??**.)

Proposizione 1.5. Sia $(A, <)$ un insieme ordinato finito. Allora $(A, <) \cong (n, \in)$ dove $n = |A|$.

Dim. Procediamo per induzione su $n = |A|$. Se $n = 1$, la tesi è banale, quindi occupiamoci del passo induttivo quando $|A| = n+1$. Visto che ogni insieme ordinato finito ha massimo, prendiamo $a = \max A$ e consideriamo $A' = A \setminus \{a\}$. Applicando l'ipotesi induttiva all'insieme A' che ha cardinalità n, abbiamo l'esistenza di un isomorfismo $\psi : (A', <) \to (n, \in)$. Se si estende ψ ponendo $\psi(a) = n$, si ottiene infine l'isomorfismo cercato tra $(A, <)$ e $(n + 1, \in)$. $\square$

Come abbiamo visto dal principio del buon ordinamento, i numeri naturali ω sono il prototipo di insieme infinito bene ordinato. Viceversa, i numeri interi $\mathbb{Z}$, i numeri razionali $\mathbb{Q}$, e i numeri reali $\mathbb{R}$ non sono bene ordinati (ad esempio non hanno minimo).

Un'utile caratterizzazione della proprietà di buon ordinamento è la seguente.

Proposizione 1.6. (AC) Un insieme ordinato $(A, <)$ è bene ordinato se e solo se *non* esistono catene discendenti

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

Dim. Una implicazione è immediata perché chiaramente una catena discendente è un esempio di insieme non vuoto privo di minimo.

Per l'implicazione inversa occorre l'assioma di scelta. Supponiamo che A *non* sia bene ordinato, e sia $X \subseteq A$ un suo sottoinsieme non vuoto privo di minimo. Fissiamo una funzione di scelta f su X, e definiamo una catena discendente per ricorsione numerabile in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = f(X) \\ a_{n+1} = f(\{x \in X \mid x < a_n\}) \end{cases}$$

La definizione data è ben posta. Infatti, visto che X non ha minimo, per ogni n l'insieme $\{x \in X \mid x < a_n\}$ è non vuoto. $\square$

Definizione 1.7. Un sottoinsieme S di un insieme ordinato A si dice *segmento iniziale* se è "chiuso verso il basso", cioè se $x < s \in S \Rightarrow x \in S$. Il *segmento iniziale generato* da un elemento $a \in A$ è il segmento

$$A_a \;=\; \{x \in A \mid x < a\}.$$

Anche l'insieme vuoto è considerato un segmento iniziale; e notiamo che $\emptyset = A_a$ è generato da un elemento a se e solo se $a = \min A$.

Chiaramente se $(A, <)$ è bene ordinato, per ogni $a \in A$ anche $(A_a, <)$ è bene ordinato, con la relazione indotta da quella di A.

[1] Vedi Esercizio **??**.

Per quanto sia banale, è bene tenere a mente che se $a' < a$ sono elementi di A, allora il segmento iniziale di $(A_a, <)$ determinato da a' coincide con il segmento iniziale di A determinato da a', cioè: $(A_a)_{a'} = A_{a'}$.

Vale la seguente caratterizzazione.

PROPOSIZIONE 1.8. Un insieme ordinato $(A, <)$ è bene ordinato se e solo se ogni segmento iniziale $S \neq A$ è generato da un elemento $a \in A$, cioè $S = A_a$ per un opportuno $a \in A$.[2]

DIM. Visto che $S \neq A$, l'insieme $A \setminus S$ non è vuoto, e quindi ammetterà elemento minimo $a = \min(A \setminus S)$. Se $x < a$, allora $x \notin (A \setminus S)$, cioè $x \in S$. Se $x \geq a$ allora $x \notin S$, altrimenti, per la proprietà di segmento iniziale, si avrebbe che anche $a \in S$. Abbiamo così verificato che $S = A_a$.

Viceversa, dato $X \subseteq A$ non vuoto, consideriamo l'insieme dei suoi minoranti $S = \{a \in A \mid \forall x \in X\ a < x\}$. È facile verificare che $S \neq A$ è un segmento iniziale (può accadere che $S = \emptyset$). Ma allora $S = A_a$ per un opportuno a, e si verifica direttamente che un tale elemento $a = \min X$ è il minimo cercato. □

ESERCIZIO 1.9. Sia $(A, <)$ un insieme bene ordinato. Dimostrare che esiste un insieme $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ tale che $(\mathfrak{A}, \subset) \cong (A, <)$.

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, una catena di insiemi totalmente ordinati è ancora un insieme totalmente ordinato (Proposizione **??**). La stessa proprietà *non* si estende ai buoni ordini.

ESEMPIO 1.10. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, l'insieme $[k, +\infty)_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq k\}$ è un sottoinsieme bene ordinato di $\mathbb{Z}$ (è infatti isomorfo ad ω). L'unione della catena di buoni ordini $\mathcal{F} = \{[k, +\infty)_{\mathbb{Z}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ è $(\mathbb{Z}, <)$, che *non* è bene ordinato.

Tuttavia, con un'opportuna ipotesi più forte, anche la proprietà di buon ordinamento si conserva passando all'unione.

PROPOSIZIONE 1.11. *Sia $\mathcal{F}$ una catena di insiemi bene ordinati. Se gli elementi di $\mathcal{F}$ sono uno segmento iniziale dell'altro, cioè se per ogni $(A, <_A), (B, <_B) \in \mathcal{F}$, si ha che $(A, <_A)$ è un segmento iniziale di $(B, <_B)$ o viceversa, allora l'unione è un insieme bene ordinato.*

DIM. Sia $(X, <)$ l'insieme ordinato ottenuto come unione di $\mathcal{F}$, e sia $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme non vuoto. Fissiamo un elemento $y_0 \in Y$, e sia $(A, <_A) \in \mathcal{F}$ tale che $y_0 \in A$. Se $y_0 = \min Y$ abbiamo finito. Altrimenti, per ogni $x < y_0$, prendiamo $(B, <_B) \in \mathcal{F}$ con $x \in B$. Dall'ipotesi sappiamo che $(A, <_A)$ è un segmento iniziale di $(B, <_B)$ o viceversa; in ogni caso segue che anche $x \in A$. Dunque $X_{y_0} = \{x \in X \mid x < y_0\} \subseteq A$, e quindi anche $Y' = \{y \in Y \mid y < y_0\} \subseteq A$. Concludiamo la dimostrazione osservando che il minimo di Y in $(X, <)$ coincide con il minimo di Y' in $(A, <_A)$. □

[2] Per questa caratterizzazione, è essenziale aver incluso l'insieme vuoto tra i possibili segmenti iniziali $S \neq A$. Ad esempio, $(\mathbb{Z}, <)$ non è bene ordinato ma ogni suo segmento iniziale *non vuoto* $S \neq \mathbb{Z}$ è generato da un elemento. La stessa proprietà vale per i reali $(\mathbb{R}, <)$, e più in generale per ogni insieme ordinato *completo*, se ci limitiamo ai segmenti $S \neq \mathbb{R}$ privi di massimo; in questo caso infatti $S = \mathbb{R}_r$ dove $r = \sup S$.

Cominciamo a vedere le prime proprietà degli insiemi bene ordinati. Una semplice ma utile osservazione è la seguente.

Proposizione 1.12. *Sia $(A,<)$ un insieme bene ordinato. Se $\varphi : A \to A$ preserva l'ordine, cioè se $a < a' \Rightarrow \varphi(a) < \varphi(a')$, allora φ è non decrescente, cioè $\varphi(a) \geq a$ per ogni $a \in A$.*

Dim. Se per assurdo la tesi fosse falsa, esisterebbe $x = \min\{a \in A \mid \varphi(a) < a\}$. Ma allora $\varphi(x) < x \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) < \varphi(x)$ e quindi $\varphi(x) \in \{a \in A \mid \varphi(a) < a\}$, contro la minimalità di x. □

Come immediate conseguenze, otteniamo le seguenti proprietà:

Proposizione 1.13. Sia $(A,<)$ un insieme bene ordinato.

(1) A non è isomorfo ad alcun suo segmento iniziale proprio, cioè $A_a \ncong A$ per ogni $a \in A$;
(2) Segmenti iniziali propri diversi non sono isomorfi, cioè $a \neq a' \Rightarrow A_a \ncong A_{a'}$;
(3) L'unico automorfismo $\varphi : A \to A$ è l'identità.

Dim. (1) Non possono esistere funzioni $\varphi : A \to A_a$ che preservano l'ordine, perché si avrebbe $\varphi(a) \in A_a$, cioè $\varphi(a) < a$, contro la Proposizione 1.12.

(2) Basta notare che se $a' < a$ allora $A_{a'}$ è un segmento iniziale dell'insieme bene ordinato A_a, ed applicare la (1).

(3) Sia $\varphi : A \to A$ una funzione che preserva l'ordine. Dimostriamo che se φ è diversa dall'identità, allora non è un isomorfismo. A questo scopo, prendiamo $x = \min\{a \in A \mid \varphi(a) \neq a\}$. Se $a < x$, chiaramente $\varphi(a) = a < x$. Se $a > x$, per la Proposizione 1.12 si ha $\varphi(a) \geq a > x$. Visto che anche $\varphi(x) \neq x$, si conclude che x non appartiene all'immagine di φ, che quindi non può essere un isomorfismo. □

Esercizio 1.14. Dati due insiemi bene ordinati $(A,<)$ e $(B,<)$, esiste al più un isomorfismo $\varphi : A \to B$.

Per quanto molto semplice, il prossimo risultato è importante e sarà usato ripetutamente nel seguito.

Proposizione 1.15. Sia $\varphi : (A,<) \to (B,<)$ un isomorfismo tra insiemi ordinati. Allora per ogni $a \in A$, la restrizione $\varphi_{|A_a} : A_a \to B_{\varphi(a)}$ è un isomorfismo tra il segmento iniziale di A generato da a, e il segmento iniziale di B generato da $\varphi(a)$.

Dim. Visto che φ preserva l'ordine, certamente $\varphi[A_a] \subseteq B_{\varphi(a)}$. Resta da vedere che vale anche l'altra inclusione $B_{\varphi(a)} \subseteq \varphi[A_a]$. Sia $b < \varphi(a)$; per la suriettività di φ esiste $a' \in A$ con $\varphi(a') = b$. Deve essere $a' < a$, perché φ preserva l'ordine. □

Una proprietà fondamentale degli insiemi bene ordinati è che sono sempre "confrontabili", cioè (a meno di isomorfismi) sono sempre uno segmento iniziale dell'altro.

Teorema 1.16 (Tricotomia degli insiemi bene ordinati).
Siano $(A,<)$ e $(B,<)$ due insiemi bene ordinati. Allora vale una ed una sola delle seguenti tre possibilità:

(1) $A \cong B$;

(2) $A \cong B_b$ *per un opportuno* $b \in B$ *;*
(3) $B \cong A_a$ *per un opportuno* $a \in A$.

Dim. Vediamo anzitutto che può verificarsi al più una delle tre possibilità di sopra. Se valessero sia la (1) che la (2), B sarebbe isomorfo ad un suo segmento proprio B_b, contro la Proposizione 1.13. Analogamente, da (1) e (3) seguirebbe l'assurdo $A \cong A_a$. Supponiamo infine che valgano (2) e (3) e sia $\psi : B \to A_a$ un isomorfismo. La restrizione $\psi_{|B_b}$ è un isomorfismo tra B_b e $A_{a'}$, dove $a' = \psi(a)$. Ma allora si otterrebbe l'assurdo che $A \cong A_{a'}$.

Sia ora $\Gamma = \{(a, b) \in A \times B \mid A_a \cong B_b\}$. Le coppie di Γ formeranno (il grafico di) una funzione, che ci darà l'isomorfismo cercato. Notiamo che se $0_A = \min A$ e $0_B = \min B$, allora $(0_A, 0_B) \in \Gamma$, perché entrambi i corrispondenti segmenti iniziali sono vuoti, dunque banalmente isomorfi. Se 1_A è il successore di 0_A e 1_B è il successore di 0_B, allora anche $(1_A, 1_B) \in \Gamma$, perché i corrispondenti segmenti iniziali sono rispettivamente $\{0_A\}$ e $\{0_B\}$; e così via. Vogliamo dimostrare che in questo modo si ottiene una funzione $0_A \mapsto 0_B$, $1_A \mapsto 1_B$ *ecc.*, che è l'isomorfismo cercato.

Se $(a, b), (a, b') \in \Gamma$, cioè se $A_a \cong B_b$ e $A_a \cong B_{b'}$, allora $B_b \cong B_{b'}$, e quindi $b = b'$ per la Proposizione 1.13. Questo dimostra che Γ è effettivamente una funzione. Possiamo dunque usare la consueta notazione $\Gamma(a)$ per indicare quell'unico elemento b tale che $(a, b) \in \Gamma$.

Supponiamo ora che $\Gamma(a) = b$ e sia $\varphi : A_a \to B_{\Gamma(a)}$ un isomorfismo. Se $a' < a$, la restrizione $\varphi_{|A_{a'}} : A_{a'} \to B_{\varphi(a')}$ è ancora un isomorfismo, e perciò anche $a' \in \operatorname{dom}(\Gamma)$ e inoltre $\Gamma(a') = \varphi(a) < b$. Questo dimostra che $\operatorname{dom}(\Gamma)$ è un segmento iniziale di A (eventualmente coincidente con tutto A), e che Γ preserva l'ordine. Se $b' < b$, allora la restrizione $\varphi_{|A_{a'}} : A_{a'} \to B_{b'}$ è un isomorfismo, dove a' è l'elemento tale che $\varphi(a') = b'$. Dunque $\Gamma(a') = b'$, e resta verificato che $\operatorname{imm}(\Gamma)$ è un segmento di B.

Per quanto dimostrato sopra, la funzione $\Gamma : A' \to B'$ è un isomorfismo tra un segmento iniziale $A' = \operatorname{dom}(\Gamma)$ di A ed un segmento iniziale $B' = \operatorname{imm}(\Gamma)$ di B. Notiamo che non può accadere che $A' = A_a$ e $B' = B_b$ siano entrambi segmenti propri. Infatti, se così fosse, $\Gamma : A_a \cong B_b$ sarebbe un isomorfismo, dunque $(a, b) \in \Gamma$, e si avrebbe $a \in \operatorname{dom}(\Gamma) = A_a$ e $b \in \operatorname{imm}(\Gamma) = B_b$, il che è assurdo. Restano così le tre possibilità elencate nell'enunciato del teorema, cioè:

(1) $A' = A$ e $B' = B$, dunque $\Gamma : A \cong B$.
(2) $A' = A$ e $B' = B_b$ è un segmento iniziale proprio, dunque $\Gamma : A \cong B_b$.
(3) $A' = A_a$ è un segmento iniziale proprio e $B' = B$, dunque $\Gamma : A_a \cong B$.

□

In conseguenza della tricotomia, possiamo dare una relazione d'ordine tra *tipi d'ordine* ("order types") degli insiemi bene ordinati.

Notazione 1.17. Siano A e B insiemi bene ordinati. Scriviamo:

- $\operatorname{ot}(A) = \operatorname{ot}(B)$ quando $A \cong B$;
- $\operatorname{ot}(A) < \operatorname{ot}(B)$ quando $A \cong B_b$ per qualche $b \in B$;
- $\operatorname{ot}(A) \leq \operatorname{ot}(B)$ quando $\operatorname{ot}(A) = \operatorname{ot}(B)$ oppure $\operatorname{ot}(A) < \operatorname{ot}(B)$.

È immediato verificare questa relazione "$\leq$" tra tipi di buon ordine soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, oltre alla tricotomia. Dunque, abbiamo una relazione d'ordine totale tra le classi di isomorfismo (cioè tra i tipi d'ordine) degli insiemi bene ordinati. Inoltre, vale anche la proprietà di buon ordinamento.

Proposizione 1.18. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi bene ordinati. Allora esiste $A \in \mathcal{F}$ che ha tipo d'ordine minimo, cioè tale che $\mathrm{ot}(A) \leq \mathrm{ot}(B)$ per ogni $B \in \mathcal{F}$.

Dim. Fisso un generico elemento $X \in \mathcal{F}$. Se $\mathrm{ot}(X) \leq \mathrm{ot}(B)$ per ogni $B \in \mathcal{F}$, ho già quanto voluto. Altrimenti, per ogni $B \in \mathcal{F}$ non isomorfo a X, esiste un unico elemento $x_B \in X$ tale che $B \cong X_{x_B}$. Prendo $x_A \in X$ il minimo tra tutti gli elementi x_B al variare di $B \ncong X$. Segue direttamente dalla definizione che il corrispondente $A \in \mathcal{F}$ è l'insieme con tipo d'ordine minimo che cercavamo. $\square$

Proposizione 1.19. Sia A bene ordinato. Se $B \subseteq A$ allora $\mathrm{ot}(B) \leq \mathrm{ot}(A)$.

Dim. Se per assurdo fosse $\mathrm{ot}(B) > \mathrm{ot}(A)$, allora esisterebbe un isomorfismo $\psi : A \to B_b$ per un opportuno $b \in B$. Visto che ψ è una funzione definita su A a valori in A che preserva l'ordine, si avrebbe $\psi(b) \geq b \notin B_b$, una contraddizione. $\square$

Attenzione! Può accadere che sottoinsiemi propri abbiano lo stesso tipo d'ordine di tutto l'insieme. Ad esempio i numeri pari $\{2n \mid n \in \omega\} \subset \omega$ sono un sottoinsieme proprio di ω che è isomorfo ad ω.

Esercizio 1.20. (AC) Sia $(A, <)$ un insieme ordinato infinito. Dimostrare che sono proprietà equivalenti:

(1) $(A, <) \cong (\omega, \in)$;
(2) Ogni segmento iniziale di A è finito;
(3) Ogni sottoinsieme infinito di A è privo di massimo.

Abbiamo già visto che ogni tipo di buon ordine finito ha un rappresentante canonico, cioè il numero naturale dato dalla sua cardinalità (vedi Proposizione 1.5). È poi immediato verificare che $\mathrm{ot}(n) < \mathrm{ot}(m)$ se e solo se $n < m$. Tra gli insiemi bene ordinati infiniti, il tipo d'ordine più piccolo è quello dell'insieme dei numeri naturali.

Proposizione 1.21. $\mathrm{ot}(\omega)$ è il più piccolo tipo di buon ordine infinito.

Dim. Intanto, per ogni insieme bene ordinato finito $(A, <)$, si ha che $\mathrm{ot}(A) = \mathrm{ot}(n)$ dove $n = |A|$, e $\mathrm{ot}(n) < \mathrm{ot}(\omega)$, visto che n è un segmento iniziale proprio di ω. Sia ora $(A, <)$ un insieme bene ordinato infinito. Se per assurdo fosse $\mathrm{ot}(A) < \mathrm{ot}(\omega)$, allora A sarebbe isomorfo ad un segmento iniziale proprio di ω. Questo non è possibile perché i segmenti iniziali di ω sono tutti finiti (sono i numeri naturali n). Per la tricotomia, segue allora che $\mathrm{ot}(\omega) \leq \mathrm{ot}(A)$, come volevamo. $\square$

2. Somma, prodotto ed esponenziazione di buoni ordini

In questo paragrafo vedremo tre operazioni fondamentali che si possono definire tra insiemi ordinati, e cioè la somma, il prodotto, e l'esponenziazione.

Assegnati due insiemi ordinati, il modo più naturale di combinarli ed ottenerne uno nuovo è quello di disporre in fila tutti gli elementi del primo insieme, seguiti da tutti gli elementi del secondo insieme. Strettamente parlando, questo tipo di operazione presuppone che i due insiemi siano disgiunti, ma con un semplice trucco possiamo estenderla anche al caso generale.

Definizione 2.1. L'*unione disgiunta* $A \sqcup B$ di due insiemi A e B è definita ponendo

$$A \sqcup B \ = \ (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \ = \ \{(a,0) \mid a \in A\} \cup \{(b,1) \mid b \in B\}$$

Dunque $A \sqcup B$ è l'insieme ottenuto "attaccando" ad ogni elemento $a \in A$ l'etichetta 0, e "attaccando" ad ogni elemento $b \in B$ l'etichetta 1, così da ottenere copie disgiunte di A e di B. Per semplicità, nel caso in cui A e B siano già insiemi disgiunti, nella definizione di sopra identificheremo A con $A \times \{0\}$ e B con $B \times \{1\}$, in modo da avere $A \sqcup B = A \cup B$.

Definizione 2.2. La *somma* $A + B$ di due insiemi ordinati $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ è l'insieme ordinato $(A \sqcup B, <)$ dove l'ordine è definito ponendo:

- $(a, 0) < (a', 0) \Leftrightarrow a <_A a'$ per ogni $a, a' \in A$,
- $(b, 1) < (b', 1) \Leftrightarrow b <_B b'$ per ogni $b, b' \in B$,
- $(a, 0) < (b, 1)$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

È immediato verificare che $(A + B, <)$ è in effetti un ordine totale. Inoltre:

Proposizione 2.3. *$A + B$ è bene ordinato se e solo se sia A che B sono bene ordinati.*

Dim. Supponiamo prima che $A + B$ sia bene ordinato. Dato un sottoinsieme $X \subseteq A$ non vuoto, se $(a, 0)$ è il minimo dell'insieme $X \times \{0\}$ in $A + B$, allora $a = \min X$. Nello stesso modo, per ogni insieme non vuoto $Y \subseteq B$, se $(b, 1)$ è il minimo di $Y \times \{1\}$ in $A + B$, allora $b = \min Y$.

Viceversa, supponiamo che A e B siano bene ordinati, e consideriamo un insieme non vuoto $Z \subseteq A + B$. Se esiste $a \in A$ con $(a, 0) \in Z$, allora $\min Z = (\widetilde{a}, 0)$ dove $\widetilde{a} = \min\{a \in A \mid (a, 0) \in Z\}$. Altrimenti $Z \subseteq B \times \{1\}$, e $\min Z = (\widetilde{b}, 1)$ dove $\widetilde{b} = \min\{b \in B \mid (b, 1) \in Z\}$. □

Notiamo che la somma tra insiemi ordinati determina anche una somma tra tipi d'ordine, perché è coerente per isomorfismo. Si ha infatti:

Esercizio 2.4. Se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ allora $A + B \cong A' + B'$.

In base alla nostra definizione, l'unione disgiunta *non* è un'operazione associativa, perchè in generale $(A \sqcup B) \sqcup C \neq A \sqcup (B \sqcup C)$. Di consequenza anche $(A + B) + C \neq A + (B + C)$. Se però guardiamo alla sostanza, cioè al tipo d'ordine, la somma tra insiemi ordinati è associativa.

Esercizio 2.5. Per tutti gli insiemi ordinati A, B, C, si ha un isomorfismo

$$(A \boldsymbol{+} B) \boldsymbol{+} C \;\cong\; A \boldsymbol{+} (B \boldsymbol{+} C)$$

A meno di isomorfismo, la somma tra buoni ordini soddisfa la proprietà associativa. Di conseguenza, Per semplificare la notazione, nel seguito ometteremo le parentesi nel caso di somme di più insiemi ordinati,

Nota bene 2.6. In senso stretto, la notazione $A_1 \boldsymbol{+} A_2 \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} A_n$ relativa alla somma di più di due insiemi ordinati è ambigua, perché dipende dal posizionamento delle parentesi. Tuttavia abbiamo visto che, a meno di isomorfismo, la somma tra ordini soddisfa la proprietà associativa e quindi, al variare di tutti i possibili modi in cui si possono piazzare le parentesi, si ottengono buoni ordini che sono tutti isomorfi tra loro. Per questo, per semplificare la notazione, nel seguito ometteremo le parentesi nel caso di somme di più insiemi ordinati, convenendo che quelle somme sono da intendersi come somme tra tipi d'ordine.

Esercizio 2.7. Mostrare che per tutti gli $n, m \in \omega$ pensati come insiemi (bene) ordinati dall'appartenenza $\in$, si ha che $n \boldsymbol{+} m \cong n + m$.

Esercizio 2.8. Trovare un sottoinsieme di $(\mathbb{Q}, <)$ isomorfo a $\omega \boldsymbol{+} \omega$.

Analogamente a quanto succedeva con i numeri naturali, anche i tipi di buon ordine hanno successore.

Proposizione 2.9. *Sia A un insieme bene ordinato e sia $\{\star\}$ un singoletto. Allora $\mathrm{ot}(A \boldsymbol{+} \{\star\})$ è il più piccolo tra i tipi d'ordine maggiori di $\mathrm{ot}(A)$.*

Dim. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $\star \notin A$, ed identificare $A \sqcup \{\star\} = A \cup \{\star\}$. Supponiamo che $\mathrm{ot}(B) < \mathrm{ot}(A \cup \{\star\})$; allora esiste un opportuno $\xi \in A \cup \{\star\}$ tale che $B \cong (A \boldsymbol{+} \{\star\})_\xi$. Se $\xi = \star$, allora $(A \boldsymbol{+} \{\star\})_\xi = A$ e quindi $\mathrm{ot}(B) = \mathrm{ot}(A)$. Se invece $\xi \in A$, allora $(A \boldsymbol{+} \{\star\})_\xi = A_\xi$ e quindi $\mathrm{ot}(B) = \mathrm{ot}(A_\xi) < \mathrm{ot}(A)$. □

Notazione 2.10. Per ogni insieme bene ordinato $(A, <)$, denotiamo con

$$\mathrm{ot}(A) + 1 \;=\; \mathrm{ot}(A \boldsymbol{+} \{\star\})$$

il tipo di buon ordine *successore* di $\mathrm{ot}(A)$.

Almeno inizialmente, i tipi d'ordine bene ordinati si dispongono quindi come avevamo informalmente visto all'inizio del paragrafo:

$$\mathrm{ot}(0) < \mathrm{ot}(1) < \mathrm{ot}(2) < \ldots < \mathrm{ot}(n) < \mathrm{ot}(n+1) < \ldots < \mathrm{ot}(\omega) < \mathrm{ot}(\omega \boldsymbol{+} \{\star\}) < \ldots$$

Attenzione! La somma tra tipi d'ordine *non* è commutativa. Ad esempio, se ω è l'insieme bene ordinato dei numeri naturali, allora si verifica facilmente che $\{\star\} \boldsymbol{+} \omega \cong \omega$ per ogni singoletto $\{\star\}$. Abbiamo dunque:

$$\mathrm{ot}(\{\star\} \boldsymbol{+} \omega) \;=\; \mathrm{ot}(\omega) \;<\; \mathrm{ot}(\omega \boldsymbol{+} \{\star\}).$$

In aritmetica, il prodotto $n \cdot m$ si può pensare come somma iterata di n con se stesso per m volte:

$$n \cdot m \;=\; \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ volte}}$$

In modo analogo, un'idea di prodotto tra due insiemi ordinati A e B è quella di sommare A a se stesso per "B volte". Per dare un senso preciso a questa intuizione, consideriamo prima l'esempio più semplice, cioè la somma $A \boldsymbol{+} A$. In base alla nostra definizione, si prendono due copie disgiunte di A, e si considera l'ordine che dispone prima tutti gli elementi della prima copia $A \times \{0\}$, seguiti da tutti gli elementi della seconda copia $A \times \{1\}$. Infatti $A \boldsymbol{+} A$ non è altro che il prodotto cartesiano $A \times \{0, 1\}$ dove la copia di A al "livello 0" precede la copia di A al "livello 1". Se al posto di $\{0, 1\}$ mettiamo in verticale gli elementi di un qualunque insieme ordinato B, per analogia arriviamo alla seguente nozione generale di prodotto tra A e B.

Definizione 2.11. Il *prodotto* $A \boldsymbol{\times} B$ di due insiemi ordinati $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ è l'insieme ordinato $(A \times B, <)$ con l'ordine *anti-lessicografico*:[3]

$$(a, b) < (a', b') \iff b < b' \text{ oppure } b = b' \ \&\ a < a'.$$

La verifica che la relazione $<$ definita sopra è in effetti un ordine totale è immediata. Un modo equivalente di pensare al prodotto $A \boldsymbol{\times} B$ è immaginare di rimpiazzare ogni elemento di B con una copia di A.

Esercizio 2.12. Sia A un insieme ordinato, e sia $B = \{b_1 < \ldots < b_k\}$ un insieme ordinato finito con k elementi. Allora

$$A \boldsymbol{\times} B \ \cong\ \underbrace{A \boldsymbol{+} A \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} A}_{k \text{ volte}}$$

Analogamente alla somma, anche il prodotto preserva il buon ordinamento.

Proposizione 2.13. *$A \boldsymbol{\times} B$ è bene ordinato se e solo se sia A che B sono bene ordinati.*

Dim. È molto simile alla dimostrazione vista per la somma. Nell'ipotesi che $A \boldsymbol{\times} B$ sia bene ordinato, per ogni $X \subseteq A$ non vuoto prendiamo $(a, 0)$ il minimo dell'insieme $X \times \{0\}$ in $A \boldsymbol{\times} B$. È immediato verificare che allora $a = \min X$. Dato $Y \subseteq B$ non vuoto, se $(0, b)$ è il minimo di $\{0\} \times B$ in $A \boldsymbol{\times} B$, allora $b = \min Y$.

Supponiamo ora che A e B siano bene ordinati. Dato $Z \subseteq A \boldsymbol{\times} B$ non vuoto, prendiamo $\widetilde{b}$ il minimo "livello" di una coppia in Z, cioè

$$\widetilde{b} \ = \ \min\{b \in B \mid \exists\, a \in A \ (a, b) \in Z\} \ = \ \min(\operatorname{imm}(Z)).$$

Allora $\min Z = (\widetilde{a}, \widetilde{b})$ dove $\widetilde{a} = \min\{a \in A \mid (a, \widetilde{b}) \in Z\}$. $\square$

Anche il prodotto è coerente per isomorfismo, e quindi determina un prodotto tra tipi d'ordine.

Esercizio 2.14. Se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ allora $A \boldsymbol{\times} B \cong A' \boldsymbol{\times} B'$.

Così come per la somma, a meno di isomorfismo anche il prodotto tra insiemi ordinati è associativo.

[3] Questo ordine si chiama *anti*-lessicografico perchè, al contrario dell'ordine alfabetico delle parole, le coppie (a, b) sono messe in fila "leggendole" nel verso contrario da destra a sinistra. Dunque, prima si considera la seconda componente, e quando due coppie hanno la stessa seconda componente, si ordina in base alla prima componente.

Esercizio 2.15. Per tutti gli insiemi ordinati A, B, C, si ha un isomorfismo

$$(A \times B) \times C \;\cong\; A \times (B \times C)$$

Esattamente come fatto per le somme (vedi Nota Bene 2.6) nel seguito ometteremo le parentesi nel caso di prodotti di più insiemi ordinati, che saranno intesi come prodotti tra tipi d'ordine.

Esercizio 2.16. Mostrare che per tutti gli $n, m \in \omega$ pensati come insiemi ordinati dall'appartenenza $\in$, si ha che $n \times m \cong n \cdot m$.

Esercizio 2.17. Trovare un sottoinsieme di $(\mathbb{Q}, <)$ isomorfo a $\omega \times \omega$.

Attenzione! Così come accade per la somma, anche il prodotto tra tipi d'ordine *non* è commutativo. Ad esempio, la funzione f tale che $f(0, n) = 2n$ e $f(1, n) = 2n + 1$ è un isomorfismo $f : \{0, 1\} \times \omega \cong \omega$. Per contro, $\omega \not\cong \omega + \omega \cong \omega \times \{0, 1\}$. Abbiamo dunque che

$$\mathrm{ot}(\{0,1\} \times \omega) \;=\; \mathrm{ot}(\omega) \;<\; \mathrm{ot}(\omega + \omega) \;=\; \mathrm{ot}(\omega \times \{0,1\}).$$

Ragionando informalmente, l'insieme ordinato $A \times (B + C)$ si ottiene disponendo tante copie disgiunte di A una dopo l'altra per "$B + C$ volte". Visto che $B + C$ si ottiene disponendo prima gli elementi di B e poi gli elementi di C, possiamo concludere che $A \times (B + C)$ si ottiene mettendo in fila "B copie" di A seguite da altre "C copie" di A. Formalizzando questo ragionamento, si ottiene la

Proposizione 2.18. Vale la proprietà *distributiva a destra* per tipi d'ordine:

$$A \times (B + C) \;\cong\; (A \times B) + (A \times C).$$

Dim. Per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$, e per ogni $c \in C$, poniamo

$$f(a, (b, 0)) = ((a, b), 0) \quad \text{e} \quad f(a, (c, 1)) = ((a, c), 1).$$

Segue direttamente dalle definizioni che la $f : A \times (B \sqcup C) \to (A \times B) \sqcup (A \times C)$ così definita è un isomorfismo. □

Attenzione! Non vale la proprietà distributiva a *sinistra*. Ad esempio:

$$(\{0\} + \{1\}) \times \omega \;\cong\; \{0,1\} \times \omega \;\cong\; \omega \;<\; \omega + \omega \;\cong\; (\{0\} \times \omega) + (\{1\} \times \omega).$$

L'ordine della *minima differenza* che avevamo definito sull'insieme $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ (vedi Esempio **??**), può essere considerato anche nel caso generale di insiemi di funzioni $\mathrm{Fun}(A, B)$, purché A sia bene ordinato, e B sia ordinato. Si può infatti verificare che, sotto queste ipotesi, la relazione

$$f < g \iff f(\widetilde{a}) < g(\widetilde{a}) \;\text{ dove } \widetilde{a} = \min\{a \in A \mid f(a) \neq g(a)\}.$$

è una relazione d'ordine totale. Questa relazione non preserva però il buon ordinamento.

Esempio 2.19. Pur assumendo che A e B siano entrambi bene ordinati, l'ordine della minima differenza su $\mathrm{Fun}(A, B)$ *non* è in generale un buon ordine. Ad esempio, se per ogni naturale n denotiamo con χ_n la funzione caratteristica del singoletto $\{n\}$ (cioè, $\chi_n(n) = 1$ e $\chi_n(m) = 0$ per $m \neq n$), allora abbiamo la seguente catena discendente in $\mathrm{Fun}(\omega, \{0, 1\})$:

$$\chi_1 \;>\; \chi_2 \;>\; \ldots \;>\; \chi_n \;>\; \chi_{n+1} \;>\; \ldots$$

Riusciremo ad ottenere un buon ordine restringendoci alle funzioni che assumono valore non nullo solo in un numero finito di punti.

NOTAZIONE 2.20. Siano X e Y insiemi bene ordinati, e sia $0 = \min X$.

- Il *supporto* di una funzione $f : X \to Y$ è l'insieme
$$\mathrm{Supp}(f) \;=\; \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$
- L'insieme di tutte le funzioni da X in Y aventi supporto finito:
$$\mathrm{Fun}_0(X, Y) \;=\; \{f : X \to Y \mid \mathrm{Supp}(f) \text{ è finito}\}.$$

DEFINIZIONE 2.21. L'*esponenziale* $\mathrm{Exp}(A, B)$ tra due insiemi bene ordinati $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ è l'insieme ordinato $(\mathrm{Fun}_0(B, A), <)$ con l'ordine della *massima differenza*:
$$f < g \iff f(\widetilde{b}) < g(\widetilde{b}) \;\text{ dove }\; \widetilde{b} = \max\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}.$$

Notiamo che l'insieme $\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}$ è finito perché è incluso nell'unione $\mathrm{Supp}(f) \cup \mathrm{Supp}(g)$; dunque ha sicuramente un elemento massimo (quando $f \neq g$) e la definizione di sopra è ben posta. Osserviamo che – a differenza della somma e del prodotto che sono definite per insiemi ordinati qualunque – l'esponenziale è definita soltanto tra buoni ordini.

Possiamo pensare ad una funzione $f : B \to A$ come alla stringa di "lunghezza B" ottenuta disponendo in fila i suoi valori secondo l'ordine di B. Ad esempio, se $B = \omega$ allora possiamo vedere $f : \omega \to A$ come la stringa di "lunghezza ω":
$$f(0)f(1)f(2)f(3)\ldots f(n)f(n+1)\ldots$$
In questo senso, una funzione ha supporto finito se e solo se la corrispondente stringa contiene solo un numero finito di elementi diversi da zero. Con questa interpretazione, l'ordine della massima differenza non è altro che l'ordine anti-lessicografico. Questo indica che l'esponenziale definita sopra sia una sorta di prodotto iterato. Vale infatti il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.22. Sia $B = \{b_1 < \ldots < b_k\}$ un insieme ordinato finito con k elementi, e sia A bene ordinato. Allora l'esponenziale
$$\mathrm{Exp}(A, B) \;\cong\; \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ volte}}$$

DIM. Visto che B è finito, banalmente *tutte* le funzioni $f : B \to A$ hanno supporto finito. Adesso, ad ogni funzione $f : \{b_1 < \ldots < b_k\} \to A$ facciamo corrispondere la k-upla $(f(b_1), \ldots, f(b_k))$. Questa bigezione tra $\mathrm{Fun}(B, A) = \mathrm{Fun}_0(B, A)$ e A^k è l'isomorfismo cercato perché, come abbiamo notato sopra, l'ordine della massima differenza corrisponde all'ordine anti-lessicografico. □

Dobbiamo ancora verificare che l'ordine della massima differenza è effettivamente un buon ordine.

PROPOSIZIONE 2.23. Siano A e B due insiemi bene ordinati. Allora il loro esponenziale $\mathrm{Exp}(A, B)$ è un insieme bene ordinato.

Dim. Per vedere che l'ordine della massima differenza è un ordine, l'unica cosa non banale da verificare è la proprietà transitiva. Supponiamo $f < g < h$, e siano $b_1 = \max\{b \mid f(b) \neq g(b)\}$ e $b_2 = \max\{b \mid g(b) \neq h(b)\}$. Distinguiamo tre casi.

- Se $b_1 < b_2$, allora $h(b_2) > g(b_2) = f(b_2)$, ed inoltre $h(b) = g(b) = f(b)$ per ogni $b > b_2$. Dunque $h > f$.
- Se $b_1 = b_2$, allora $h(b_2) > g(b_2) > f(b_2)$, dunque $h(b_2) > f(b_2)$, ed inoltre $h(b) = g(b) = f(b)$ per $b > b_2$. Anche in questo caso $h > f$.
- Se $b_1 > b_2$, allora $h(b_1) = g(b_1) > f(b_1)$, ed inoltre $h(b) = g(b) = f(b)$ per ogni $b > b_1$. Dunque $h > f$.

Occupiamoci ora della proprietà del buon ordine. Per ogni $f \in \mathrm{Fun}_0(B, A)$, denotiamo con $\chi(f)$ la coppia $(a, b) \in A \times B$ dove $b = \max \mathrm{Supp}(f)$ e $a = f(b)$. Useremo la seguente proprietà, che collega l'ordinamento di $\mathrm{Exp}(A, B)$ con quello del prodotto $A \times B$. La dimostrazione segue direttamente dalle definizioni ed è lasciata come esercizio.

$$(\star) \quad \chi(f) < \chi(g) \;\Rightarrow\; f < g \;\Rightarrow\; \chi(f) \leq \chi(g).$$

Supponiamo per assurdo che $\mathrm{Exp}(A, B)$ non sia bene ordinato, e prendiamo una catena discendente

$$f_0 \;>\; f_1 \;>\; \ldots \;>\; f_n \;>\; \ldots$$

dove il valore $\chi(f_0) = (a, b)$ del termine iniziale sia il minimo possibile (qui stiamo usando la proprietà di buona fondatezza di $A \times B$). Per ogni $n > 0$, dalla $(\star)$ segue che $\chi(f_n) \leq (a, b)$. D'altra parte, se fosse $\chi(f_n) < (a, b)$, la catena discendente $f_n > f_{n+1} > \ldots$ contraddirebbe la minimalità di (a, b). Quindi, per ogni n abbiamo che $\chi(f_n) = (a, b)$, cioè $\max \mathrm{Supp}(f_n) = b$ e $f_n(b) = a$. Definiamo adesso

$$g_n(x) \;=\; \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x < b \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

È facile verificare che $g_0 > g_1 > \ldots$ è una catena discendente dove $\max(\mathrm{Supp}(g_0)) < b$, e dunque $\chi(g_0) < (a, b)$, contro la minimalità di (a, b). $\square$

Esercizio 2.24. Trovare un sottoinsieme di $(\mathbb{Q}, <)$ isomorfo a $\mathrm{Exp}(\omega, \omega)$.

3. Ordinali

Introduciamo ora una speciale classe di insiemi bene ordinati, cioè gli *ordinali.* Come vedremo, si tratta di insiemi che generalizzano i numeri naturali. Il risultato fondamentale che dimostreremo è che ogni insieme bene ordinato è isomorfo ad uno ed un solo ordinale. Dunque potremo prendere gli ordinali come i rappresentanti canonici dei tipi d'ordine bene ordinati.

Per definire gli ordinali, dobbiamo introdurre prima un'importante nozione insiemistica.

Definizione 3.1. Un insieme A si dice *transitivo* se $a' \in a \in A \Rightarrow a' \in A$; equivalentemente, se $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Esercizio 3.2. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi transitivi. Allora anche l'intersezione $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ e l'unione $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ sono insiemi transitivi.

Definizione 3.3. Un insieme α è un *ordinale* se:

(1) $(\alpha, \in)$ è un insieme bene ordinato dalla relazione di appartenenza;
(2) α è un insieme *transitivo.*[4]

Abbiamo già incontrato esempi di ordinali.

Esempio 3.4.

(1) Tutti i numeri naturali n sono ordinali;
(2) ω è un ordinale.

È facile trovare esempi di insiemi che, pur essendo bene ordinati dall'appartenenza, non sono ordinali. Ad esempio sia $A = \{2n \mid n \in \omega\}$ l'insieme dei numeri naturali pari. Chiaramente $(A, \in)$ è bene ordinato in quanto sottoinsieme dell'insieme bene ordinato $(\omega, \in)$. Tuttavia l'insieme A *non* è transitivo perchè, ad esempio, $1 \in 2 \in A$ ma $1 \notin A$.

Tranne che per gli ordinali finiti, seguendo la consuetudine, denoteremo sempre gli ordinali con lettere greche:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \xi, \eta, \zeta, \ldots$$

Come conseguenza diretta della transitività degli ordinali, ricaviamo la seguente utile proprietà.

Proposizione 3.5. *Non esistono catene discendenti di ordinali:*

$$\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \ldots \ni \alpha_n \ni \alpha_{n+1} \ni \ldots$$

Dim. Dalla transitività dell'ordinale α_0, segue che $X = \{\alpha_n \mid n \geq 1\} \subseteq \alpha_0$ è un sottoinsieme non vuoto di α_0. Ma X non ha elemento minimo rispetto alla relazione di appartenenza, e questo contraddice l'ipotesi che $(\alpha_0, \in)$ è bene ordinato. $\square$

In un ordinale, visto che la relazione d'ordine considerata è la relazione $\in$ di appartenenza, i segmenti iniziali generati da un elemento coincidono con l'elemento stesso. Precisamente vale la seguente equivalenza.

Proposizione 3.6. *Sia $(\alpha, \in)$ un insieme ordinato dalla relazione di appartenenza. Allora sono proprietà equivalenti:*

(*i*) *α è un insieme transitivo;*
(*ii*) *Per ogni $a \in \alpha$, il segmento iniziale generato da a coincide con a stesso, cioè: $\alpha_a = \{a' \in \alpha \mid a' < a\} = a$.*

In particolare, se α è un ordinale allora $\alpha_a = a$ per ogni $a \in \alpha$.

Dim. Visto che la relazione d'ordine è l'appartenenza, per ogni $a \in \alpha$ si ha che:

$$\alpha_a =: \{a' \in \alpha \mid a' \in a\} = a \cap \alpha.$$

Osserviamo poi che seguenti proprietà sono tra loro equivalenti.

---

[4] Attenzione a non confondere la proprietà di *transitività insiemistica*, con la proprietà transitiva degli ordini. Anche se nel caso particolare degli ordinali queste due proprietà coincidono (visto che la relazione d'ordine considerata è quella di appartenenza), in generale si tratta di due concetti diversi, anche se analoghi.

- α è un insieme transitivo.
- Per ogni $a \in \alpha$ si ha che $a \subseteq \alpha$.
- Per ogni $a \in \alpha$ si ha che $a = a \cap \alpha = \alpha_a$.

$\square$

Osserviamo che elementi di ordinali sono ordinali.

Proposizione 3.7. Se α è un ordinale e $\beta \in \alpha$, allora anche β è un ordinale.

Dim. Poiché α è un insieme transitivo, da $\beta \in \alpha$ segue che $\beta \subseteq \alpha$, e dunque $(\beta, \in)$ è bene ordinato perché $(\alpha, \in)$ lo è. Inoltre, se $\gamma \in \beta' \in \beta$, di nuovo per il fatto che α è un insieme transitivo, abbiamo che $\beta' \in \alpha$, e quindi anche $\gamma \in \alpha$. Infine, visto che α è totalmente ordinato da $\in$ e che γ, β', β sono suoi elementi, da $\gamma \in \beta'$ e $\beta' \in \beta$ segue che $\gamma \in \beta$, per la proprietà transitiva dell'ordine su α. $\square$

Intersezione di ordinali è un ordinale. (Più avanti vedremo che anche le unioni di ordinali sono ordinali.)

Proposizione 3.8. Sia $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ una famiglia non vuota di ordinali. Allora anche $\bigcap_{i \in I} \alpha_i$ è un ordinale.

Dim. Notiamo che $\beta := \bigcap_{i \in I} \alpha_i$ è un insieme transitivo perché intersezione di insiemi transitivi. Inoltre, fissato un qualunque ordinale α_{i_0} della famiglia, banalmente $\beta \subseteq \alpha_{i_0}$, e quindi $(\beta, \in)$ è bene ordinato perché $(\alpha_{i_0}, \in)$ lo è. $\square$

Sugli ordinali, le relazioni di appartenenza e di inclusione stretta coincidono.

Proposizione 3.9. Siano α e β ordinali. Sono proprietà equivalenti:

(1) $\alpha \in \beta$;
(2) α è un segmento iniziale proprio di β;
(3) $\alpha \subsetneq \beta$.

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\alpha \in \beta$, allora il segmento iniziale proprio $\beta_\alpha = \alpha$ per la Proposizione precedente 3.6.

(2) $\Rightarrow$ (3) è banale.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo $\alpha \subsetneq \beta$ e prendiamo $\xi = \min(\beta \setminus \alpha)$. Vogliamo mostrare che $\alpha = \xi$, e quindi $\alpha \in \beta$.

Per la transitività di β, da $\xi \in \beta$ segue che $\xi \subseteq \beta$; ma allora, per la minimalità di ξ, tutti gli elementi di ξ devono appartenere ad α. Questo mostra l'inclusione $\xi \subseteq \alpha$. Supponiamo ora $\gamma \in \alpha$. Chiaramente $\xi \neq \gamma$, altrimenti $\xi = \gamma \in \alpha$ mentre $\xi \notin \alpha$; inoltre $\xi \notin \gamma$, altrimenti $\xi \in \gamma \in \alpha \Rightarrow \xi \in \alpha$ per la transitività di α, mentre $\xi \notin \alpha$. Visto che $\gamma, \xi \in \beta$, per la proprietà di ordine di $(\beta, \in)$ deve essere allora $\gamma \in \xi$. Questo mostra l'altra inclusione $\alpha \subseteq \xi$. $\square$

Una fondamentale proprietà è il seguente teorema di unicità degli ordinali nelle classi di isomorfismo.

Proposizione 3.10. *Siano α e β ordinali. Se $\alpha \cong \beta$, allora $\alpha = \beta$.*

Dim. Sia $\varphi : \alpha \to \beta$ un isomorfismo. Dimostriamo che φ è la funzione identità. Se per assurdo così non fosse, prendiamo

$$\xi = \min\{x \in \alpha \mid \varphi(x) \neq x\}.$$

Restringendo φ al segmento iniziale α_ξ, si ottiene un isomorfismo

$$\psi \;=\; \varphi_{|\alpha_\xi} : \alpha_\xi \to \beta_{\varphi(\xi)}.$$

Chiaramente ψ è la funzione identità, e quindi $\alpha_\xi = \beta_{\varphi(\xi)}$. Resta da notare che, per la $(2)'$ nella definizione di ordinale, i segmenti iniziali $\alpha_\xi = \xi$ e $\beta_{\varphi(\xi)} = \varphi(\xi)$. Si concluderebbe così che $\xi = \varphi(\xi)$, contro la definizione di ξ. □

Mettendo insieme alcuni dei risultati visti fin qui, ricaviamo il

Teorema 3.11 (Tricotomia degli Ordinali).
Siano α e β due ordinali. Allora vale una ed una sola delle seguenti tre eventualità:

$$(1)\ \alpha = \beta\ ;\quad (2)\ \alpha \in \beta\ ;\quad (3)\ \beta \in \alpha\,.$$

Diamo due dimostrazioni di questo risultato.

Dim 1. È conseguenza diretta della tricotomia degli insiemi bene ordinati (Teorema 1.16). Infatti, $\alpha \cong \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$, per la Proposizione 3.10. Inoltre, se $\alpha \cong \beta_\gamma = \gamma$ per qualche $\gamma \in \beta$, allora $\alpha = \beta_\gamma = \gamma \in \beta$; e analogamente, se $\beta \cong \alpha_\delta = \delta$ per qualche $\delta \in \alpha$, si ha $\beta = \alpha_\delta = \delta \in \alpha$. □

Dim. 2. In questa dimostrazione alternativa, *non* facciamo uso del teorema sulla tricotomia dei buoni ordini, ma useremo ripetutamente l'equivalenza tra appartenenza e inclusione stretta tra ordinali, data dalla la Proposizione 3.9.

Dati due ordinali $\alpha \neq \beta$, consideriamo l'intersezione $\gamma = \alpha \cap \beta$. Chiaramente γ è un ordinale. Per raggiungere la tesi, basta mostrare che $\gamma = \alpha$ o $\gamma = \beta$. Infatti se $\gamma = \alpha \cap \beta = \alpha$ allora $\alpha \subsetneq \beta$, e quindi $\alpha \in \beta$; e analogamente, se $\gamma = \alpha \cap \beta = \beta$ allora $\beta \subsetneq \alpha$, e quindi $\beta \in \alpha$.

Se per assurdo fosse $\gamma \subsetneq \alpha$ e $\gamma \subsetneq \beta$, allora si avrebbe che $\gamma \in \alpha$ e $\gamma \in \beta$, dunque $\gamma \in \alpha \cap \beta$, cioè $\gamma \in \gamma$, una contraddizione. □

Mettendo insieme risultati dimostrati sopra, si ottiene il seguente:

Teorema 3.12. La relazione di appartenenza $\in$ soddisfa tutte le proprietà di ordine totale sulla collezione degli ordinali:

(1) *Irriflessiva*: Per ogni α ordinale, $\alpha \notin \alpha$;
(2) *Asimmetrica*: Per tutti gli ordinali α e β, $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$;
(3) *Transitiva*: Per tutti gli ordinali α, β, γ, $(\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma) \Rightarrow \alpha \in \gamma$;
(4) *Ordine totale*: Per tutti gli ordinali α e β, vale una ed una sola delle seguenti: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$;

Dim. (1). Se fosse $\alpha \in \alpha$, allora non varrebbe la proprietà antiriflessiva dell'insieme ordinato $(\alpha, \in)$.

(2) Se per assurdo si avesse $\alpha \in \beta$ e $\beta \in \alpha$ allora, per la transitività di α, si avrebbe $\alpha \in \alpha$, contraddicendo la (1).

(3) afferma che ogni ordinale γ è un insieme transitivo, e questo fa parte della definizione di ordinale.

(4) è la proprietà tricotomica degli ordinali (Teorema 3.11). □

Visto il Teorema 3.12, da qui in avanti useremo il simbolo d'ordine $<$ tra ordinali. Precisamente, se α e β sono ordinali, scriveremo:

- $\alpha < \beta$ per intendere che $\alpha \in \beta$ (equivalentemente, $\alpha \subsetneq \beta$);

- $\alpha \leq \beta$ per intendere che $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$ (equivalentemente, $\alpha \subseteq \beta$).

Proposizione 3.13. Se α è un ordinale, allora anche $\alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale, e il suo tipo d'ordine è il più piccolo tipo di buon ordine tra quelli maggiori di α.

Dim. La transitività di $\alpha \cup \{\alpha\}$ segue direttamente dalla transitività di α. Inoltre $(\alpha \cup \{\alpha\}, \in)$ è bene ordinato perché è isomorfo a $\alpha \boldsymbol{+} \{\star\}$. Infine, ricordiamo che $ot(\alpha \boldsymbol{+} \{\star\})$ è il tipo di buon ordine successore di $ot(\alpha)$. □

Notazione 3.14. Per analogia con i numeri naturali, si denota

$$\alpha + 1 \ = \ \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Possiamo finalmente dimostrare che la relazione di appartenenza sugli ordinali soddisfa anche la proprietà di buon ordine.

Proposizione 3.15. *Sia X un insieme non vuoto di ordinali. Allora l'intersezione $\xi = \bigcap X$ è l'elemento minimo di X rispetto alla relazione di appartenenza.*

Dim. Per la definizione di ξ, per ogni $\alpha \in X$ si ha che $\xi \leq \alpha$ (cioè $\xi \subseteq \alpha$). Dunque ξ è un minorante di X. Osserviamo infine che $\xi \in X$, e quindi è il minimo elemento di X. Infatti, se così non fosse, avremmo $\xi < \alpha$ per ogni $\alpha \in X$, da cui $\xi + 1 \leq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$, e quindi $\xi \subsetneq \xi + 1 \subseteq \bigcap X$, il che è assurdo. □

Mettendo insieme il Teorema 3.12 con la proposizione precedente, si ottiene il seguente

Corollario 3.16. *Sia Λ un insieme di ordinali. Allora $(\Lambda, \in)$ è un insieme bene ordinato.*

Come conseguenza di quanto già visto per i buoni ordini, abbiamo la seguente proprietà degli ordinali.

Proposizione 3.17. *Non esistono catene discendenti di ordinali:*

$$\alpha_1 \ni \alpha_2 \ni \ \ldots \ \ni \alpha_n \ni \alpha_{n+1} \ni \ \ldots$$

Dim. Altrimenti, $\Lambda := \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sarebbe un insieme di ordinali *non* bene ordinato. □

Proposizione 3.18. *Sia X un insieme di ordinali. Allora X è un ordinale se e solo se X è un insieme transitivo.*

Dim. Se X è un ordinale, allora per definizione X è un insieme transitivo, ed inoltre i suoi elementi sono ordinali per la Proposizione 3.7. Viceversa, se X è un insieme transitivo di ordinali, allora X è un ordinale perché $(X, \in)$ è bene ordinato, per il Corollario 3.16. □

Abbiamo già visto che la collezione di Russell $R = \{x \mid x \notin x\}$ e la collezione universale di tutti gli insiemi $V = \{x \mid x = x\}$ *non* possono essere insiemi. Un ulteriore importante esempio di questo tipo di collezioni si ottiene considerando gli ordinali.

Proposizione 3.19 (Paradosso di Burali-Forti).
La collezione $ORD = \{\alpha \mid$ "α è un ordinale" $\}$ non è un insieme.

DIM. Supponiamo per assurdo che ORD sia un insieme. Visto che elementi di ordinali sono ordinali, ORD sarebbe un insieme transitivo di ordinali, e dunque esso stesso un ordinale. Ma allora avremmo ORD $\in$ ORD, il che è assurdo. $\square$

Dimostriamo finalmente il risultato che giustifica l'introduzione degli ordinali.

TEOREMA 3.20. *Ogni insieme bene ordinato è isomorfo ad un unico ordinale.*

DIM. L'unicità è già stata dimostrata nella Proposizione 3.10. Occupiamoci dunque dell'esistenza. Fissato l'insieme bene ordinato $(A, <)$, consideriamo l'insieme

$$X = \{a \in A \mid \text{il segmento iniziale proprio } A_a \text{ è isomorfo ad un ordinale}\}.$$

Consideriamo inoltre:

$$Y = \{\alpha \text{ ordinale} \mid \alpha \text{ è isomorfo ad un segmento iniziale proprio di } A\}.$$

Attenzione! Mentre l'insieme X esiste per l'assioma di *separazione*, gli assiomi di ZFC visti finora *non* possono garantire che un tale Y sia un insieme. A questo scopo, dovremo usare un nuovo assioma chiamato *rimpiazzamento*, che sarà introdotto e discusso nel prossimo capitolo. Assumiamo comunque per il momento l'esistenza dell'insieme Y, e proseguiamo con la dimostrazione.

Sia f la funzione $f : X \to Y$ dove $f(a)$ è quell'*unico* ordinale α tale che $\alpha \cong A_a$ (ricordiamo che due ordinali diversi non possono essere isomorfi). Dimostriamo ora due proprietà:

(1) Sia $a \in X$. Se $b < a$, allora $b \in X$ e $f(b) \in f(a)$.
(2) Sia $a \in X$. Se $\beta \in f(a)$, allora esiste $b \in X$ con $f(b) = \beta$;

Per definizione di f, esiste un isomorfismo $\psi : A_a \to f(a)$. Notiamo che per ogni $b < a$, il segmento iniziale generato da b in A_a coincide con il segmento iniziale generato da b in A, cioè

$$(A_a)_b \;=\; \{x \in A_a \mid x < b\} \;=\; \{x \in A \mid x < b\} \;=\; A_b.$$

Inoltre, visto che $f(a)$ è un ordinale, il segmento iniziale $f(a)_{\psi(b)}$ coincide con $\psi(b)$. Allora, restringendo ψ ad A_b ottieniamo un isomorfismo $\psi_{|A_b} : A_b \to \psi(b)$. Questo dimostra che $b \in X$ e che $f(b) = \psi(b) \in f(a)$, cioè la (1). Adesso, dato $\beta \in f(a)$, prendiamo $b \in A_a$ tale che $\psi(b) = \beta$. Per quanto visto sopra, restringendo ψ ad A_b, si ottiene un isomorfismo $A_b \cong \psi(b) = \beta$, e questo dimostra la (2).

In conseguenza delle due proprietà di sopra, X è un segmento iniziale di A, $Y = \mathrm{imm}(f) = \gamma$ è un ordinale in quanto insieme transitivo di ordinali, e $f : X \to \gamma$ è un isomorfismo d'ordine. Se X fosse un segmento iniziale proprio, allora $X = A_a$ per un opportuno $a \in A$. Ma abbiamo appena visto che $f : A_a \to \gamma$ è un isomorfismo, e quindi avremmo che $a \in X = A_a$, il che è assurdo. Concludiamo che $X = A$ e che $f : A \to \gamma$ è l'isomorfismo cercato. $\square$

Stabilito che gli ordinali sono rappresentanti canonici nelle classi di isomorfismo dei buoni ordini, da qui in avanti ci concentreremo sugli ordinali. Infatti le loro proprietà descrivono, senza perdita di generalità, le proprietà di tutti i buoni ordini.

PROPOSIZIONE 3.21. *Un ordinale α ha massimo se e solo se esiste un ordinale β con $\alpha = \beta + 1$.*

Dim. Vediamo prima che se α ha un elemento massimo β, allora $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Un'inclusione segue immediatamente dalla definizione di massimo, perchè per ogni $\gamma \in \alpha$ si ha $\gamma \leq \beta$, cioè $\gamma \in \beta$ o $\gamma = \beta$. L'altra inclusione $\beta \cup \{\beta\} \subseteq \alpha$ si ottiene per la transitività insiemistica di α, visto che da $\beta \in \alpha$ segue che $\beta \subseteq \alpha$.

Viceversa, se $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, allora per ogni $\gamma \in \alpha$ si ha $\gamma \in \beta$ o $\gamma = \beta$, cioè $\gamma \leq \beta$. Dunque $\beta \in \alpha$ è l'elemento massimo di α. $\square$

Grazie a questa proposizione, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 3.22. Un ordinale $\alpha \neq 0$ si dice *successore* se ha massimo (cioè se è della forma $\alpha = \beta + 1$), e si dice *limite* altrimenti.

Per transitività, se α è un ordinale allora $\gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma \subseteq \alpha$, e quindi $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. L'inclusione inversa vale se e solo se l'ordinale è limite.

Proposizione 3.23. *Un ordinale λ è limite se e solo se $\bigcup \lambda = \lambda$.*

Dimostrazione. Come abbiamo osservato sopra, visto che λ è un insieme transitivo, si ha l'inclusione $\bigcup \lambda \subseteq \lambda$. Poi basta notare che le seguenti proprietà sono ognuna equivalente alla successiva:

- $\lambda \subseteq \bigcup \lambda$;
- Per ogni $\beta \in \lambda$ esiste $\gamma \in \lambda$ tale che $\beta \in \gamma$;
- $(\lambda, \in)$ non ha massimo.

$\square$

Abbiamo già visto che ogni insieme non vuoto di ordinali X ha un elemento minimo dato dall'intersezione $\xi = \bigcap X$. Non sempre un insieme di ordinali ha massimo, ma ha sempre un estremo superiore.

Proposizione 3.24. *Sia X un insieme non vuoto di ordinali. Allora l'unione $\eta = \bigcup X$ è un ordinale, ed inoltre $\eta = \sup X$.*

Dim. Dati $\gamma \in \beta \in \bigcup X$, prendiamo $\alpha \in X$ tale che $\beta \in \alpha$. Allora β è un ordinale in quanto elemento di un ordinale; inoltre $\gamma \in \alpha$ perché α è transitivo, e quindi $\gamma \in \bigcup X$. Questo mostra che X è un insieme transitivo di ordinali, e quindi è esso stesso un ordinale $\eta = \bigcup X$. Chiaramente $\alpha \leq \eta$ per ogni $\alpha \in X$, visto che $\alpha \subseteq \bigcup X$. Inoltre, se ζ è un maggiorante di X, cioè se $\zeta \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$, allora $\zeta \supseteq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$, e quindi $\zeta \supseteq \bigcup X = \eta$, cioè $\zeta \leq \eta$. Concludiamo che η è il minimo dei maggioranti di X. $\square$

Uno strumento tipico della teoria degli insiemi è l'induzione transfinita, che estende la familiare induzione sui numeri naturali a tutta la classe degli ordinali. Notiamo che mentre tutti numeri naturali $n \neq 0$ sono successori, esistono ordinali infiniti $\alpha \neq 0$ che *non* lo sono. Per questo, in una formulazione dell'induzione, si distinguono tre casi: il caso *base* $\alpha = 0$, il caso *successore* $\alpha = \beta + 1$, e il caso *limite*.

Teorema 3.25 (Induzione Transfinita).

- Induzione forte: *Sia $P(x)$ una formula, eventualmente con parametri. Supponiamo che per ogni ordinale β valga l'implicazione $(\forall \gamma < \beta \ P(\gamma)) \rightarrow P(\beta)$.*[5] *Allora $P(\alpha)$ vale per ogni ordinale α.*

[5] Notiamo che "$\forall \gamma < 0 \ P(\gamma)$" è vera banalmente perchè non esistono ordinali $\gamma < 0$. Dunque, nel caso $\beta = 0$, l'ipotesi equivale a dire che $P(0)$ vale.

- Induzione per casi: *Sia $P(x)$ una formula, eventualmente con parametri. Supponiamo che valgano:*
  - *$P(0)$;*
  - *Per ogni ordinale β, vale implicazione $P(\beta) \to P(\beta+1)$.*
  - *Per ordinale limite λ, vale l'implicazione $(\forall \gamma < \lambda\ P(\gamma)) \to P(\lambda)$.*

  Allora $P(\alpha)$ vale per ogni ordinale α.

Dim. Chiaramente, se le ipotesi dell'induzione per casi sono soddisfatte allora anche le ipotesi dell'induzione forte sono soddisfatte; quindi, l'induzione per casi segue dall'induzione forte.

Per dimostrare quest'ultima, procediamo per assurdo e supponiamo che le ipotesi siano soddisfatte ma che esista un ordinale δ con $\neg P(\delta)$. In questo caso, $A = \{\alpha \leq \delta \mid \neg P(\alpha)\}$ sarebbe un insieme non vuoto dell'ordinale $\delta + 1$, e quindi avrebbe un elemento minimo, diciamo β. Per la minimalità di β, deve valere $P(\gamma)$ per ogni $\gamma < \beta$. Ma allora varrebbe anche $P(\beta)$, contro la nostra assunzione. $\square$

Il fondamentale risultato collegato all'induzione transfinita, che vedremo nel prossimo capitolo, è il Teorema di ricorsione transfinita che estende il Teorema di ricorsione numerabile dai numeri naturali ω alla collezione ORD di tutti gli ordinali. Analogamente a come la ricorsione numerabile permette di definire sequenze $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$, la ricorsione transfinita permetterà di definire "sequenze" $(\alpha_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ORD})$ indicizzate su tutti gli ordinali. Ricordiamo che ORD non è un insieme, e quindi anche queste ultime sequenze non saranno insiemi; potremo tuttavia considerarle nella teoria ZFC usando opportuni accorgimenti.