Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 4 Settembre 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1 (8 pt.)**.**

1. Calcolare le seguenti esponenziazioni ordinali, scrivendo il risultato in forma normale di Cantor:
   (a) $(\omega^2 + 1)^\omega$.
   (b) $(\omega^\omega + \omega)^{\omega+1}$.
2. Trovare tutte le coppie di ordinali (α, β) tali che
   (a) $\alpha + \beta = \omega^3$.
   (b) $\alpha \cdot \beta = \omega^2$.

Soluzione. (1a). $(\omega^2 + 1)^\omega = \omega^\omega$. Per dimostrarlo osserviamo che per ogni $k < \omega$ si ha

$$(\omega^k)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega^k)^n = \bigcup_{n<\omega} \omega^{kn} = \bigcup_{m<\omega} \omega^m = \omega^\omega.$$

Dunque $\omega^\omega \leq (\omega^2 + 1)^\omega \leq (\omega^3)^\omega = \omega^\omega$.

(1b). $(\omega^\omega + \omega)^{\omega+1} = \omega^{\omega^2+\omega} + \omega^{\omega^2+1}$. Notiamo che

$$\omega^{(\omega^2)} = (\omega^\omega)^\omega \leq (\omega^\omega + \omega)^\omega \leq (\omega^{\omega+1})^\omega = \omega^{(\omega+1)\omega} = \omega^{(\omega^2)}.$$

Di conseguenza:

$$(\omega^\omega + \omega)^{\omega+1} = (\omega^\omega + \omega)^\omega \cdot (\omega^\omega + \omega) = \omega^{\omega^2} \cdot (\omega^\omega + \omega) = \omega^{\omega^2} \cdot \omega^\omega + \omega^{\omega^2} \cdot \omega = \omega^{\omega^2+\omega} + \omega^{\omega^2+1}.$$

(2a). Sono la coppia $(\omega^3, 0)$ e le coppie della forma (α, ω^3) dove $\alpha < \omega^3$. Infatti abbiamo visto a lezione che gli ordinali della forma ω^γ sono additivamente chiusi, dunque se $\alpha, \beta < \omega^3$ allora $\alpha+\beta < \omega^3$, e se $\alpha < \omega^3$ allora $\alpha + \omega^3 = \omega^3$.

(2b). Sono le coppie della forma (m, ω^2) dove $1 \leq m < \omega$, oppure della forma (α, ω) dove $\omega \leq \alpha < \omega^2$, oppure la coppia $(\omega^2, 1)$. Infatti $m \cdot \omega^2 = m \cdot (\omega \cdot \omega) = (m \cdot \omega) \cdot \omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$. Inoltre se $\omega \leq \alpha < \omega^2$ allora possiamo scrivere $\alpha = \omega \cdot m + n$ dove $m, n < \omega$ con $m \geq 1$, e quindi

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 \leq \alpha \cdot \omega^2 = [(\omega \cdot m + n) \cdot \omega] \cdot \omega \leq [(\omega \cdot (m + 1)) \cdot \omega] \cdot \omega = \omega \cdot ((m + 1) \cdot \omega) \cdot \omega = \omega^3.$$

Esercizio 2 (8 pt.)**.**

1. Nella teoria ZF (quindi senza usare l'assioma di scelta) dimostrare che se $|A| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ contiene almeno due elementi, allora l'insieme $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, A)$ delle funzioni con dominio $\mathbb{R}$ ed a valori in A ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme $X := \{\alpha < \omega_2 \mid \mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_1\}$.
3. Determinare la cardinalità dell'insieme $Y := \{f : \omega_2 \to \omega_3 \mid f \text{ strettamente crescente}\}$.

Soluzione. (1). A lezione abbiamo visto che, senza usare AC, si dimostra $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. Abbiamo allora la seguente catena di disuguaglianze e uguaglianze tra cardinalità, tutte facilmente dimostrabili senza usare AC:

$$2^{\mathfrak{c}} = |\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \{0,1\})| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, A)| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \{0,1\}))| = |\mathrm{Fun}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \{0,1\})| = |\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \{0,1\})|.$$

(2). L'insieme $X \subseteq \omega_2$ ha cardinalità $\aleph_2$. Per vederlo consideriamo la funzione $f : \omega_2 \to \omega_2$ dove $f(\alpha) = \omega_1 \cdot (\alpha + 1)$. Osserviamo che $\mathrm{Imm}(f) \subseteq X$, visto che per ogni $\alpha < \omega_2$ si ha $f(\alpha) = \omega_1 \cdot \alpha + \omega_1$, e quindi $\mathrm{cof}(f(\alpha)) = \aleph_1$. Inoltre f è iniettiva perché $f(\alpha) = f(\beta)$, cioè $\omega_1 \cdot \alpha + \omega_1 = \omega_1 \cdot \beta + \omega_1$, se e solo se $\omega_1 \cdot \alpha = \omega_1 \cdot \beta$ se e solo se $\alpha = \beta$.

(3). L'insieme Y ha cardinalità $2^{\aleph_2}$. Notiamo intanto che $|Y| \leq |\mathrm{Fun}(\omega_2, \omega_3)| = (\aleph_3)^{\aleph_2} =$ (formula di Hausdorff) $= {\aleph_0}^{\aleph_2} \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_2} \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_2}$.

Per dimostrare l'altra disuguaglianza troviamo una funzione iniettiva $\psi : \mathcal{P}(\omega_2) \to Y$. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \omega_2$ consideriamo la funzione f_A definita ponendo $f_A(\alpha) = 2 \cdot \alpha + \chi_A(\alpha)$, dove χ_A è la funzione caratteristica di A. Osserviamo che f_A è strettamente crescente e quindi appartiene ad Y; infatti per ogni α si ha che $f_A(\alpha) < 2 \cdot \alpha + 2 = 2 \cdot (\alpha + 1) \leq f_A(\alpha + 1)$. Infine notiamo che ψ è iniettiva perchè se $A, B \subseteq \omega_2$ sono sottoinsiemi diversi, allora esiste α tale che $\chi_A(\alpha) \neq \chi_A(\beta)$ e quindi $f_A(\alpha) \neq f_B(\alpha)$.[1]

Esercizio 3 (7 pt.)**.** Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $f : \omega_1 \to \omega_1 \cdot \omega$ è illimitata allora non è debolmente crescente.

2. Se λ è un ordinale limite ed esiste $f : \omega_1 \to \lambda$ illimitata e debolmente crescente allora $\mathrm{cof}(\lambda) = \aleph_1$.

Soluzione. (1). Supponiamo per assurdo che esista $f : \omega_1 \to \omega_1 \cdot \omega$ illimitata e debolmente crescente. Visto che f è illimitata, per ogni $n \in \omega$ è ben definito $\alpha_n := \min\{\xi \in \omega_1 \mid f(\xi) \geq \omega_1 \cdot n\}$. Visto che f è debolmente crescente, si ha $\xi < \alpha_n \Leftrightarrow f(\xi) < \omega_1 \cdot n$. Quindi c'è una bigezione tra α_n e $A_n := \{\xi \in \omega_1 \mid f(\xi) < \omega \cdot n\}$; in particolare $|A_n| = |\alpha_n|$ è al più numerabile. Ma allora avremmo che $\omega_1 = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ è unione numerabile di insiemi al più numerabili, assurdo.

(2). Chiaramente $\mathrm{cof}(\lambda) \leq \aleph_1$. Se per assurdo fosse $\mathrm{cof}(\lambda) < \aleph_1$ allora necessariamente $\mathrm{cof}(\lambda) = \aleph_0$, visto che λ è limite. Prendiamo una successione (γ_n) strettamente crescente e illimitata in λ. Analogamente al punto precedente, visto che f è illimitata è ben definito $\alpha_n := \min\{\xi \in \omega_1 \mid f(\xi) \geq \gamma_n\}$; e per la crescenza debole di f si ha $\xi < \alpha_n \Leftrightarrow f(\xi) < \alpha_n$. Allora $|A_n| = |\alpha_n|$, e quindi $A_n := \{\xi \in \omega_1 \mid f(\xi) < \gamma_n\}$ è al più numerabile. Questo è assurdo perché avremmo $\omega_1 = \bigcup_{\gamma<\omega_1} A_n$ unione numerabile di insiemi al più numerabili.

Esercizio 4 (7 pt.)**.**

1. Sia $\lambda < \aleph_\omega$ un ordinale limite. Dimostrare che allora $\aleph_\lambda$ è un cardinale singolare.

2. Sia $\lambda < \aleph_\omega$ un ordinale limite, e supponiamo che la sequenza $(2^{\aleph_\alpha} \mid \alpha < \lambda)$ sia definitivamente uguale a κ, cioè che esista $\gamma < \lambda$ tale che $2^{\aleph_\alpha} = \kappa$ per ogni $\gamma \leq \alpha < \lambda$. Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_\lambda} = \kappa$.[2]

[1] Visto che $\mathrm{Imm}(f_A) \subseteq \omega_2$, in realtà abbiamo dimostrato che anche l'insieme $Z = \{f : \omega_2 \to \omega_2 \mid f \text{ strettamente crescente}\}$ ha cardinalità $2^{\aleph_2}$.

[2] Nella (2) si può utilizzare la proprietà del punto (1).

Soluzione. (1). Supponiamo per assurdo che $\aleph_\lambda$ sia un cardinale regolare (e quindi un cardinale debolmente inaccessibile). Allora avremmo che $\lambda \leq \aleph_\lambda = \mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda) \leq |\lambda| \leq \lambda$, e quindi $\aleph_\lambda = \lambda < \aleph_\omega$. Questo non è possibile perché $\aleph_\lambda$ è un cardinale limite, e $\aleph_\omega$ è il più piccolo cardinale limite.

(2). Sia $(\alpha_i \mid i \in \mathrm{cof}(\lambda))$ una sequenza crescente e illimitata in λ. Allora $\aleph_\lambda = \sum_{i\in\mathrm{cof}(\lambda)} \aleph_{\alpha_i}$, e quindi:

$$2^{\aleph_\lambda} = 2^{\sum_{i\in\mathrm{cof}(\lambda)} \aleph_{\alpha_i}} = \prod_{i\in\mathrm{cof}(\lambda)} 2^{\aleph_{\alpha_i}} \leq \prod_{i\in\mathrm{cof}(\lambda)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cof}(\lambda)} = (2^{\aleph_\gamma})^{\mathrm{cof}(\lambda)} = 2^{\aleph_\gamma\cdot\mathrm{cof}(\lambda)} = \kappa.$$

Giustifichiamo l'ultima uguaglianza. Dal punto (1) sappiamo che $\mathrm{cof}(\lambda) = \mathrm{cof}(\aleph_\lambda) < \aleph_\lambda$, quindi $\aleph_\gamma \cdot \mathrm{cof}(\lambda) = \aleph_\alpha$ per un opportuno $\alpha < \lambda$, e possiamo concludere che $2^{\aleph_\gamma\cdot\mathrm{cof}(\lambda)} = \kappa$.