Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 4 Settembre 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1 (8 pt.)**.**

1. Calcolare le seguenti esponenziazioni ordinali, scrivendo il risultato in forma normale di Cantor:
   (a) $(\omega^2 + 1)^\omega$.
   (b) $(\omega^\omega + \omega)^{\omega+1}$.
2. Trovare tutte le coppie di ordinali (α, β) tali che
   (a) $\alpha + \beta = \omega^3$.
   (b) $\alpha \cdot \beta = \omega^2$.

Esercizio 2 (8 pt.)**.**

1. Nella teoria ZF (quindi senza usare l'assioma di scelta) dimostrare che se $|A| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ contiene almeno due elementi, allora l'insieme $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, A)$ delle funzioni con dominio $\mathbb{R}$ ed a valori in A ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme $X := \{\alpha < \omega_2 \mid \mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_1\}$.
3. Determinare la cardinalità dell'insieme $Y := \{f : \omega_2 \to \omega_3 \mid f \text{ strettamente crescente}\}$.

Esercizio 3 (7 pt.)**.** Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $f : \omega_1 \to \omega_1 \cdot \omega$ è illimitata allora non è debolmente crescente.
2. Se λ è un ordinale limite ed esiste $f : \omega_1 \to \lambda$ illimitata e debolmente crescente allora $\mathrm{cof}(\lambda) = \aleph_1$.

Esercizio 4 (7 pt.)**.**

1. Sia $\lambda < \aleph_\omega$ un ordinale limite. Dimostrare che allora $\aleph_\lambda$ è un cardinale singolare.
2. Sia $\lambda < \aleph_\omega$ un ordinale limite, e supponiamo che la sequenza $(2^{\aleph_\alpha} \mid \alpha < \lambda)$ sia definitivamente uguale a κ, cioè che esista $\gamma < \lambda$ tale che $2^{\aleph_\alpha} = \kappa$ per ogni $\gamma \leq \alpha < \lambda$. Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_\lambda} = \kappa$. [Nella risoluzione si può utilizzare la proprietà (1).]