Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 27 Giugno 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se κ è un cardinale infinito, allora l'esponenziale tra ordinali $\alpha^\beta < \kappa$ per tutti gli ordinali non nulli $\alpha, \beta < \kappa$.
2. Se κ è un cardinale più che numerabile, allora l'esponenziale tra ordinali $\omega^\kappa = \kappa$.
3. Se κ è un cardinale infinito, allora l'esponenziale tra ordinali $\alpha^\kappa = \kappa$ per ogni $1 < \alpha < \kappa$.

Soluzione. Richiamiamo la seguente proprietà vista a lezione (poteva essere assunta nella risoluzione dell'esercizio).

- *Se almeno uno tra gli ordinali $\alpha, \beta \neq 0$ è infinito, allora $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.*

Ricordiamo che se $\alpha, \beta \neq 0$ sono ordinali, allora α^β è isomorfo all'insieme delle funzioni a supporto finito

$$\mathrm{Fun}_0(\beta, \alpha) = \{f : \beta \to \alpha \mid \mathrm{Supp}(f) := \{i \in \beta \mid f(i) \neq 0\} \text{ finito}\}$$

con l'ordine $<$ della *massima differenza*:

$$f < g \iff f(\widetilde{b}) < g(\widetilde{b}) \;\text{ dove }\; \widetilde{b} = \max\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}.$$

Osserviamo che $\mathrm{Fun}_0(\beta, \alpha) = \bigcup_{A \in \mathrm{Fin}(\beta)} \mathrm{Fun}(A, \alpha)$ dove $\mathrm{Fin}(\beta)$ è l'insieme delle parti finite di β. Abbiamo che:

$$|\alpha^\beta| = |\mathrm{Fun}_0(\beta, \alpha)| \leq \sum_{A \in \mathrm{Fin}(\beta)} |\mathrm{Fun}(A, \alpha)| = \max\left\{\sup_{A \in \mathrm{Fin}(\beta)} |\alpha|^{|A|};\; |\mathrm{Fin}(\beta)|\right\}.$$

Se β è infinito si ha $\sup_{A \in \mathrm{Fin}(\beta)} |\alpha|^{|A|} = \sup_{n \in \omega} |\alpha|^n$, e possiamo concludere che $|\alpha^\beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Infatti, se $\alpha = 1$ banalmente $\sup_{n \in \omega} |\alpha|^n = 1 < |\beta|$; se $1 < \alpha < \omega$, allora $\sup_{n \in \omega} |\alpha|^n = \aleph_0 \leq |\beta|$; e se α è infinito, $\sup_{n \in \omega} |\alpha|^n = |\alpha|$. Inoltre quando β è infinito si ha che $|\mathrm{Fin}(\beta)| = |\beta|$.

Se β è finito e α è infinito, allora $\sup_{A \in \mathrm{Fin}(\beta)} |\alpha|^{|A|} = |\alpha|^m = |\alpha|$ dove $m = |\beta| \in \omega$, e inoltre $|\mathrm{Fin}(\beta)| < \aleph_0 \leq |\alpha|$; dunque anche in questo caso $|\alpha^\beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

L'altra disuguaglianza $|\alpha^\beta| \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ è immediata.

(1). Procediamo per induzione transfinita sul cardinale infinito κ. Alla base induttiva, se $\alpha, \beta < \kappa = \aleph_0$ sono ordinali finiti, allora anche α^β è finito e quindi $\alpha^\beta < \aleph_0 = \kappa$. Al passo successore, se $\alpha, \beta < \kappa = \aleph_{\gamma+1}$, abbiamo che $|\alpha|, |\beta| \leq \aleph_\gamma$, quindi $|\alpha^\beta| \leq \aleph_\gamma$, e perciò $\alpha^\beta < \aleph_{\gamma+1} = \kappa$. Infine se $\alpha, \beta < \kappa = \aleph_\lambda$ dove λ è limite, allora esiste $\gamma < \lambda$ con $\alpha, \beta < \aleph_\gamma$, e usando l'ipotesi induttiva abbiamo che $\alpha^\beta < \aleph_\gamma < \kappa$.

(2). Visto che κ è un ordinale limite, per definizione $\omega^\kappa = \bigcup_{\gamma < \kappa} \omega^\gamma$. Notiamo anzitutto che $\kappa \leq \omega^\kappa$. Infatti per ogni $\gamma < \kappa$ si ha che $\gamma \leq \omega^\gamma \leq \omega^\kappa$, e quindi passando al sup si ha $\kappa = \bigcup_{\gamma < \kappa} \gamma \leq \omega^\kappa$ (la disuguaglianza $\gamma \leq \omega^\gamma$ può essere facilmente dimostrata per induzione transfinita su γ). Alternativamente, si può osservare che $|\omega^\gamma| = \max\{|\omega|, |\gamma|\} < \kappa$ e quindi $\omega^\gamma < \kappa$ per ogni $\gamma < \kappa$. Per l'altra disuguaglianza, sappiamo che $|\omega^\kappa| = \max\{\aleph_0, |\kappa|\} = |\kappa|$; ma κ è un ordinale iniziale, e perciò si ha necessariamente che $\kappa \leq \omega^\kappa$.

(3). Se $\kappa = \omega$, allora basta notare che per ogni ordinale finito $1 < n < \omega$ si ha che $n^\omega = \bigcup_{m \in \omega} n^m = \omega$. Se κ è più che numerabile si può ragionare in modo analogo al punto precedente. Per ogni $\omega \leq \gamma < \kappa$ si ha $|\alpha^\gamma| = \max\{|\alpha|, |\gamma|\} < \kappa$ e quindi $\alpha^\gamma < \kappa$ per ogni $\gamma < \kappa$. Passando al sup si ottiene che $\alpha^\kappa = \bigcup_{\gamma < \kappa} \alpha^\gamma \leq \kappa$. Per l'altra disuguaglianza, sappiamo che $|\alpha^\kappa| = \max\{|\alpha|, |\kappa|\} = |\kappa|$; ma κ è un ordinale iniziale, e perciò si ha necessariamente che $\kappa \leq \alpha^\kappa$.

Esercizio 2. Siano $\alpha, \beta \neq 0$ ordinali. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti.

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Esiste γ, esiste $\rho < \omega^\gamma$, ed esistono naturali positivi n, m tali che
$$\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \rho \quad \text{e} \quad \beta = \omega^\gamma \cdot m + \rho.$$

Soluzione. (2) $\Rightarrow$ (1). Abbiamo visto a lezione che gli ordinali che assorbono additivamente a sinistra sono tutte e sole le potenze di ω. Dunque $\rho + \omega^\gamma = \omega^\gamma$, e quindi si ha:

$$\alpha + \beta = (\omega^\gamma \cdot n + \rho) + (\omega^\gamma \cdot m + \rho) = \omega^\gamma \cdot n + (\rho + \omega^\gamma) + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \rho = \\ \omega^\gamma \cdot n + \omega^\gamma + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \rho = \omega^\gamma \cdot (n+m) + \rho.$$

Allo stesso modo si dimostra che $\beta + \alpha = \omega^\gamma \cdot (m+n) + \rho$, e quindi concludiamo che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Usando la forma normale di Cantor, è facile mostrare che possiamo scrivere $\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \rho$ e $\beta = \omega^\delta \cdot m + \eta$ dove $\rho < \omega^\gamma$, $\eta < \omega^\delta$, e dove n, m sono naturali positivi.

Vediamo intanto che $\gamma = \delta$. Se per assurdo così non fosse, ad esempio se $\gamma < \delta$, allora avremmo che $\alpha < \omega^\gamma \cdot n + \omega^\gamma = \omega^\gamma(n+1) < \omega^\gamma \cdot \omega = \omega^{\gamma+1} \leq \omega^\delta$, e quindi $\alpha + \omega^\delta = \omega^\delta$, per la proprietà di assorbimento per somme a sinistra delle potenze di ω. Ma allora seguirebbe che

$$\alpha + \beta = \alpha + (\omega^\delta \cdot m + \eta) = (\alpha + \omega^\delta) + \omega^\delta \cdot (m-1) + \eta = \omega^\delta + \omega^\delta \cdot (m-1) + \eta = \omega^\delta \cdot m + \eta = \beta,$$

mentre $\beta < \beta + \alpha$. Dunque $\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \rho$ e $\beta = \omega^\gamma \cdot m + \eta$ dove $\rho, \eta < \omega^\gamma$. Resta da vedere che $\rho = \eta$. Per mostrarlo, procedendo analogamente a come già fatto sopra, osserviamo che

$$\alpha + \beta = (\omega^\gamma \cdot n + \rho) + (\omega^\gamma \cdot m + \eta) = \omega^\gamma \cdot n + (\rho + \omega^\gamma) + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \eta = \\ \omega^\gamma \cdot n + \omega^\gamma + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \eta = \omega^\gamma \cdot (n+m) + \eta.$$

Allo stesso modo si ricava che $\beta + \alpha = \omega^\gamma \cdot (m+n) + \rho$. Infine, da $\omega^\gamma \cdot (n+m) + \eta = \omega^\gamma \cdot (m+n) + \rho$ segue che $\eta = \rho$, per l'unicità della differenza tra $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e $\omega^\gamma \cdot (n+m)$.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che non esistono funzioni crescenti e illimitate $f : \omega_1 \to \aleph_\omega$.
2. Dimostrare che se ν è un cardinale e $(\gamma_i \mid i \in \nu)$ è una sequenza di ordinali strettamente crescente, allora $\gamma := \bigcup_{i<\nu} \gamma_i$ ha cofinalità $\mathrm{cof}(\nu)$.
3. Determinare per quali cardinali infiniti κ il seguente insieme ha cardinalità κ:
$$\Lambda(\kappa) := \{\nu \text{ cardinale} \mid \nu < \kappa \text{ e } \mathrm{cof}(\nu) = \aleph_0\}.$$

Soluzione. (1). Supponiamo per assurdo che esista $f : \omega_1 \to \aleph_\omega$ crescente e illimitata. Per ricorsione numerabile, definiamo la funzione $g : \omega \to \omega_1$ ponendo:

$$\begin{cases} g(0) = \min\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) > \aleph_0\} \\ g(n+1) = \min\{\alpha < \omega_1 \mid \alpha > g(n) \text{ e } f(\alpha) > \aleph_{n+1}\}. \end{cases}$$

Notiamo che la definizione al passo induttivo è ben posta perché f è illimitata in $\aleph_\omega$. Per definizione g è crescente; inoltre $f(g(n)) > \aleph_n$ per ogni $n \in \omega$, e quindi la composizione $f \circ g : \omega \to \aleph_\omega$ è crescente e illimitata in $\aleph_\omega$. Segue che $g : \omega \to \omega_1$ è illimitata in ω_1; infatti se esistesse $\gamma < \omega_1$ tale che $g(n) \leq \gamma$ per ogni $n \in \omega$ allora si avrebbe che $f(g(n)) \leq f(\gamma)$ per ogni n. Si ottiene così l'assurdo cercato perché non possono esistere funzioni $g : \omega \to \omega_1$ illimitate.

(2). La dimostrazione usa ragionamenti simili al punto (1). Sia $\mu := \mathrm{cof}(\nu)$, e sia $\vartheta : \mu \to \nu$ crescente e illimitata. Chiaramente la funzione $f : \mu \to \gamma$ dove $f(i) = \gamma_{\vartheta(i)}$ è strettamente crescente e illimitata in γ, quindi $\mathrm{cof}(\gamma) \leq \mu$. Se per assurdo fosse $\mathrm{cof}(\gamma) < \mu$, prendiamo $\tau : \mathrm{cof}(\gamma) \to \gamma$ crescente e illimitata, e definiamo la funzione $g : \mathrm{cof}(\gamma) \to \mu$ ponendo:

$$\begin{cases} g(0) = \min\{\alpha < \mathrm{cof}(\gamma) \mid \tau(\alpha) > \gamma_{\vartheta(0)}\} \\ g(\xi) = \min\{\alpha < \mathrm{cof}(\gamma) \mid \alpha > g(\eta) \text{ per ogni } \eta < \xi \text{ e } \tau(\alpha) > \gamma_{\vartheta(\xi)}\}. \end{cases}$$

Notiamo che la definizione al passo induttivo è ben posta perché $\{g(\eta) \mid \eta < \xi\}$ ha cardinalità al più $|\xi| < \mathrm{cof}(\gamma)$ e quindi è limitato in $\mathrm{cof}(\mu)$; ed inoltre τ è illimitata in γ. Per definizione g è crescente; inoltre $\tau(g(\xi)) > \gamma_{\vartheta(\xi)}$ per ogni $\xi \in \mathrm{cof}(\gamma)$, e quindi la composizione $\tau \circ g : \mathrm{cof}(\gamma) \to \gamma$ è crescente e illimitata in γ. Segue che $g : \mathrm{cof}(\gamma) \to \mu$ è illimitata in μ; infatti se esistesse $\zeta < \mu$ tale che $g(\xi) \leq \zeta$ per ogni $\xi \in \mathrm{cof}(\gamma)$ allora si avrebbe che $\tau(g(\xi)) \leq f(\zeta)$ per ogni $\xi \in \mathrm{cof}(\gamma)$, e $\tau \circ g$ sarebbe limitata. Si ottiene così l'assurdo cercato; infatti avevamo supposto $\mathrm{cof}(\gamma) < \mu$ e quindi non possono esistere funzioni $g : \mathrm{cof}(\gamma) \to \mu$ illimitate.

(3). Sono tutti e soli i punti fissi della funzione-classe *aleph*, cioè i cardinali $\kappa = \aleph_\kappa$.

Supponiamo prima $\kappa = \aleph_\kappa$. Visto che κ è più che numerabile, la funzione $f : \kappa \to \kappa$ dove $f(\alpha) = \omega\alpha + \omega$ è ben definita perché $\alpha < \kappa \Rightarrow \omega\alpha + \omega < \kappa$; inoltre f è iniettiva perchè per la cancellabilità a sinistra rispetto alla somma e poi rispetto al prodotto si ha $\omega\alpha + \omega = \omega\beta + \omega \Rightarrow \omega\alpha = \omega\beta \Rightarrow \alpha = \beta$. Per concludere, osserviamo che $\{\aleph_{f(\alpha)} \mid \alpha < \kappa\}$ è un sottoinsieme di $\Lambda(\kappa)$ di cardinalità κ. Infatti $|\{\aleph_{f(\alpha)} \mid \alpha < \kappa\}| = \kappa$ per l'iniettività di f, ed inoltre $\mathrm{cof}(\aleph_{f(\alpha)}) = \mathrm{cof}(\aleph_{\omega\alpha+\omega}) = \mathrm{cof}(\omega\alpha + \omega) = \aleph_0$.

Se invece $\kappa < \aleph_\kappa$, allora $\kappa = \aleph_\alpha$ per qualche $\alpha < \kappa$. Notiamo che in questo caso

$$\Lambda(\kappa) \subseteq \{\nu \text{ cardinale} \mid \nu < \kappa\} = \{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$$

e quindi $|\Lambda(\kappa)| \leq |\alpha| < \kappa$.

Esercizio 4. Siano κ un cardinale infinito e α un ordinale infinito. Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{f : A \to \kappa \mid A \in V_\alpha\}$$

dove V_α è l'α-esimo livello nella gerarchia di von Neumann.

1. Determinare la cardinalità di Γ quando $\alpha = \omega$.
2. Dimostrare che se $\alpha = \beta + 1$ è successore e $\kappa \leq |V_\alpha|$ allora $|\Gamma| = |V_\alpha|$.
3. Nel caso in cui $\lambda > \omega$ è un ordinale limite e $\kappa < |V_\lambda|$, determinare la cardinalità di Γ scrivendola in termini della funzione-classe *beth*. [Suggerimento: Distinguere i due casi $\omega < \lambda < \omega^2$ e $\lambda \geq \omega^2$.]

Soluzione. Anzitutto notiamo che $\Gamma = \bigcup_{A \in V_\omega} \mathrm{Fun}(A, \kappa)$ dove l'unione è disgiunta.

(1). In questo caso si ha $|\Gamma| = \kappa$. Infatti

$$|\Gamma| = \sum_{A \in V_\omega} |\mathrm{Fun}(A, \kappa)| = \sum_{A \in V_\omega} \kappa^{|A|} = \max\left\{\sup_{A \in V_\omega} \kappa^{|A|}; |V_\omega|\right\} = \max\{\kappa; \aleph_0\} = \kappa.$$

Si osservi infatti che ogni $A \in V_\omega$ è finito e dunque $\kappa^{|A|} = \kappa$; inoltre $|V_\omega| = \aleph_0$.

(2). In questo caso si ha $|\Gamma| = |V_\alpha|$. Infatti abbiamo:

$$|\Gamma| = \sum_{A \in V_\alpha} \kappa^{|A|} = \sum_{A \subseteq V_\beta} \kappa^{|A|} = \max\left\{\sup_{A \subseteq V_\beta} \kappa^{|A|}; |\mathcal{P}(V_\beta)|\right\} = \max\left\{\kappa^{|V_\beta|}; 2^{|V_\beta|}\right\} = 2^{|V_\beta|} = |V_\alpha|.$$

Osserviamo che per ipotesi $\kappa \leq |V_\alpha| = |\mathcal{P}(V_\beta)| = 2^{|V_\beta|}$, e quindi $\kappa^{|V_\beta|} = 2^{|V_\beta|}$.

(3). Ricordiamo che a lezione avevamo dimostrato che $|V_{\omega+\gamma}| = \beth_\gamma$; in particolare, $|V_\gamma| = \beth_\gamma$ per ogni $\gamma \geq \omega^2$.

Se λ è un ordinale limite con $\omega < \lambda < \omega^2$ allora $\lambda = \omega \cdot n$ dove $1 < n < \omega$. In questo caso si ha che $|\Gamma| = \beth_{n-1}$, come segue dalle seguenti uguaglianze:

$$|\Gamma| = \sum_{A \in V_{\omega\cdot n}} \kappa^{|A|} = \max\left\{ \sup_{A\in V_{\omega\cdot n}} \kappa^{|A|}; |V_{\omega\cdot n}| \right\} = \beth_{\omega(n-1)}.$$

Infatti, per ipotesi $\kappa < |V_\lambda| = |V_{\omega\cdot n}| = \beth_{\omega(n-1)}$; inoltre $A \in V_{\omega\cdot n} \Leftrightarrow A \subseteq V_\beta$ per qualche $\beta < \omega \cdot n$, e quindi $|A| < |V_{\omega\cdot n}| = \beth_{\omega(n-1)}$. Visto che $\beth_{\omega(n-1)}$ è un limite forte, abbiamo allora $\sup_{A\in V_{\omega\cdot n}} \kappa^{|A|} = \sup_{\mu<\beth_{\omega(n-1)}} \kappa^\mu = \beth_{\omega(n-1)}$.

Nel caso in cui $\lambda \geq \omega^2$ la dimostrazione è del tutto simile, e si ottiene che $|\Gamma| = \beth_\lambda$ dalle seguenti uguaglianze:

$$|\Gamma| = \sum_{A\in V_\lambda} \kappa^{|A|} = \max\left\{ \sup_{A\in V_\lambda} \kappa^{|A|}; |V_\lambda| \right\} = \beth_\lambda.$$

Infatti, per ipotesi $\kappa < |V_\lambda| = \beth_\lambda$; inoltre $A \in V_\lambda \Leftrightarrow A \subseteq V_\beta$ per qualche $\beta < \lambda$, e quindi $|A| < |V_\beta|$. Osserviamo che $\lambda \geq \omega^2$ e $\beta < \lambda$ implicano che anche $\omega + \beta < \lambda$. Visto che $\beth_{\omega(n-1)}$ è un limite forte, abbiamo allora $\sup_{A\in V_\lambda} \kappa^{|A|} = \sup_{\beta<\lambda} \kappa^{|V_\beta|} = \sup_{\beta<\lambda} \kappa^{|V_{\omega+\beta}|} = \sup_{\beta<\lambda} \kappa^{\beth_\beta} = \beth_\lambda$.

Un modo alternativo per rispondere a questa domanda (3) è quello di mostrare che dalle ipotesi segue $|\Gamma| = |V_\lambda|$, e poi usare la formula vista a lezione per la cardinalità di V_λ. Precisamente, si ha:

$$|\Gamma| = \sum_{A\in V_\lambda} \kappa^{|A|} = \max\left\{ \sup_{A\in V_\lambda} \kappa^{|A|}; |V_\lambda| \right\} = |V_\lambda|.$$

Infatti, osserviamo che $\kappa^{|A|} < |V_\lambda|$ per ogni $A \in V_\lambda$. Per verificarlo notiamo che $|V_\lambda| = \sup_{\beta<\lambda} |V_\beta|$, visto che λ è limite; e allora dall'ipotesi $\kappa < |V_\lambda|$ segue che $\kappa \leq |V_\beta|$ per qualche $\beta < \lambda$. Inoltre $A \in V_\lambda \Leftrightarrow A \subseteq V_{\beta'}$ per qualche $\beta' < \lambda$. Se $\gamma = \max\{\beta, \beta'\}$, si ha $\kappa^{|A|} \leq |V_\gamma|^{|V_\gamma|} = 2^{|V_\gamma|} = |V_{\gamma+1}| < |V_\lambda|$.