Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se κ è un cardinale infinito, allora l'esponenziale tra ordinali $\alpha^\beta < \kappa$ per tutti gli ordinali non nulli $\alpha, \beta < \kappa$.
2. Se κ è un cardinale più che numerabile, allora l'esponenziale tra ordinali $\omega^\kappa = \kappa$.
3. Se κ è un cardinale infinito, allora l'esponenziale tra ordinali $\alpha^\kappa = \kappa$ per ogni $1 < \alpha < \kappa$.

Esercizio 2. Siano $\alpha, \beta \neq 0$ ordinali. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti.

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Esiste γ , esiste $\rho < \omega^\gamma$, ed esistono naturali positivi n, m tali che

$$\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \rho \quad \text{e} \quad \beta = \omega^\gamma \cdot m + \rho.$$

Esercizio 3.

1. Dimostrare che non esistono funzioni crescenti e illimitate $f : \omega_1 \rightarrow \aleph_\omega$.
2. Dimostrare che se ν è un cardinale e $(\gamma_i \mid i \in \nu)$ è una sequenza di ordinali strettamente crescente, allora $\gamma := \bigcup_{i < \nu} \gamma_i$ ha cofinalità $\text{cof}(\nu)$.
3. Determinare per quali cardinali infiniti κ il seguente insieme ha cardinalità κ :

$$\Lambda(\kappa) := \{\nu \text{ cardinale} \mid \nu < \kappa \text{ e } \text{cof}(\nu) = \aleph_0\}.$$

Esercizio 4. Siano κ un cardinale infinito e α un ordinale infinito. Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{f : A \rightarrow \kappa \mid A \in V_\alpha\}$$

dove V_α è l' α -esimo livello nella gerarchia di von Neumann.

1. Determinare la cardinalità di Γ quando $\alpha = \omega$.
2. Dimostrare che se $\alpha = \beta + 1$ è successore e $\kappa \leq |V_\alpha|$ allora $|\Gamma| = |V_\alpha|$.
3. Nel caso in cui $\lambda > \omega$ è un ordinale limite e $\kappa < |V_\lambda|$, determinare la cardinalità di Γ scrivendola in termini della funzione-classe *beth*. [Suggerimento: Distinguere i due casi $\omega < \lambda < \omega^2$ e $\lambda \geq \omega^2$.]