Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta "ridotta" del 22 Giugno 2020

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Mostrare che se $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$ allora $\alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma+1}$.
2. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 5)^{\omega+2}$.
3. Trovare tutte le coppie di ordinali (α, β) dove $\alpha, \beta < \omega^2$ tali che $\alpha^2 \cdot 2 = \beta^2$.
4. Dimostrare che se α o β sono successori allora $\alpha^2 \cdot 2 \neq \beta^2$.

Soluzione. (1). Visto che $\alpha < \omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma \omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^\gamma n$, esiste un naturale $m \neq 0$ tale che $\alpha \leq \omega^\gamma m$. Allora $\omega^\gamma \leq \alpha \leq \omega^\gamma m$ implica che

$$\omega^{\gamma+1} \ = \ \omega^\gamma \cdot \omega \ \leq \ \alpha \cdot \omega \ \leq \ \omega^\gamma m\, \omega \ = \ \omega^\gamma \omega \ = \ \omega^{\gamma+1}.$$

(2). Sia $\alpha := \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 5$. Ricordiamo che $\omega = 2\omega = 3\omega$; quindi da $\omega^2 \leq \alpha < \omega^3$ segue che

$$\omega^\omega \ = \ \omega^{2\omega} \ = \ (\omega^2)^\omega \ \leq \ \alpha^\omega \ \leq \ (\omega^3)^\omega \ = \ \omega^{3\omega} \ = \ \omega^\omega.$$

Inoltre, dal punto (1) segue che $\alpha \cdot \omega = \omega^3$, e quindi

$$(\omega^2 3 + \omega 5)^2 \ = \ (\omega^2 3 + \omega 5)\, \omega^2 3 + (\omega^2 3 + \omega 5)\, \omega 5 \ = \ \omega^4 3 + \omega^3 5.$$

Possiamo così concludere che

$$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 5)^{\omega+2} \ = \ (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 5)^\omega \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 5)^2 \ = \ \omega^\omega \cdot (\omega^4 3 + \omega^3 5) \ = \ \omega^{\omega+4} 3 + \omega^{\omega+3} 5.$$

(3). Notiamo intanto che α e β sono entrambi finiti o entrambi infiniti. Il primo caso non è possibile perchè, come è ben noto, $n^2 \cdot 2 = m^2$ non ha soluzioni che siano numeri naturali. Allora $\alpha, \beta \geq \omega$ e, con la divisione euclidea, troviamo $a, b \neq 0$ e $n, m < \omega$ tali che

$$\alpha = \omega a + n, \quad \beta = \omega b + m.$$

Dall'ipotesi $\alpha, \beta < \omega^2$ segue che $a, b < \omega$. Notiamo ora che

$$\alpha^2 \ = \ (\omega a + n)(\omega a + n) \ = \ (\omega a + n)\, \omega a + (\omega a + n)\, n \ = \ \omega^2 a + \omega a n + n,$$

e quindi

$$\alpha^2 \cdot 2 \ = \ (\omega^2 a + \omega a n + n) + (\omega^2 a + \omega a n + n) \ = \ \omega^2 (2a) + \omega a n + n.$$

Analogamente, $\beta^2 = \omega^2 b + \omega b m + m$; quindi, da $\alpha^2 2 = \beta^2$ segue che

$$\omega^2 (2a) + \omega a n + n \ = \ \omega^2 b + \omega b m + m.$$

Intanto deve essere $n = m$. Se $n = m = 0$, l'uguaglianza vale se e solo se $b = 2a$. Se invece fosse $n = m \neq 0$, dall'unicità della forma normale di Cantor seguirebbe che $a = b$ e che $2a = b$, e quindi in questo caso l'uguaglianza di sopra non può valere. Concludiamo che le coppie (α, β) cercate sono tutte e sole le coppie della forma $(\omega a, \omega(2a))$ con $0 < a < \omega$.

(4). Supponiamo per assurdo che $\alpha^2 2 = \beta^2$. Notiamo intanto che α successore se e solo se α^2 successore se e solo se $\alpha^2 2 = \beta^2$ successore se e solo se β successore. Dunque, dall'ipotesi segue che sia α che β sono successori. Se almeno uno tra α e β è finito, allora sono entrambi finiti; ma – tranne nel caso $\alpha = \beta = 0$ – questo non può accadere perchè non esistono numeri naturali $n, m \neq 0$ tali che $n^2 2 = m^2$ (è l'irrazionalità di $\sqrt{2}$). Possiamo dunque assumere che sia α che β siano infiniti. Scriviamone le rispettive forme normali di Cantor, dove tutti i coefficienti $a_i, b_j \in \omega$ sono diversi da zero, i termini noti $n, m \neq 0$, e dove gli esponenti $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k > 0$ e $\beta_1 > \ldots > \beta_h > 0$ sono in ordine decrescente:

- $\alpha = \omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n$.
- $\beta = \omega^{\beta_1} b_1 + \omega^{\beta_2} b_2 + \ldots + \omega^{\beta_h} b_h + m$.

Usando le note proprietà di assorbimento, abbiamo che

$$\begin{aligned}\alpha^2 = {} & (\omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n)\omega^{\alpha_1} a_1 + (\omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n)\omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \\ & (\omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n)\omega^{\alpha_k} a_k + (\omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n)n \;= \\ & \omega^{\alpha_1+\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_1+\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_1+\alpha_k} a_k + \omega^{\alpha_1} a_1 n + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n.\end{aligned}$$

e quindi

$$\alpha^2 2 \;=\; \alpha^2 + \alpha^2 \;=\; \omega^{\alpha_1+\alpha_1} 2a_1 + \omega^{\alpha_1+\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_1+\alpha_k} a_k + \omega^{\alpha_1} a_1 n + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k + n.$$

Notiamo che si tratta della forma normale di Cantor di $\alpha^2 2$, visto che gli esponenti

$$\alpha_1 + \alpha_1 > \alpha_1 + \alpha_2 > \ldots > \alpha_1 + \alpha_k > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k > 0$$

sono in ordine decrescente, e che tutti i coefficienti sono numeri naturali diversi da zero. In modo analogo si ricava la forma normale di Cantor per β^2:

$$\beta^2 \;=\; \omega^{\beta_1+\beta_1} b_1 + \omega^{\beta_1+\beta_2} b_2 + \ldots + \omega^{\beta_1+\beta_h} b_h + \omega^{\beta_1} b_1 m + \omega^{\beta_2} b_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} b_k + m.$$

Vista l'unicità della forma normale di Cantor, le espressioni trovate per $\alpha^2 2$ e β^2 devono coincidere. Considerando i termini di grado massimo, si ha che $\alpha_1 + \alpha_1 = \beta_1 + \beta_1$, e quindi $\alpha_1 = \beta_1$; ed inoltre $2a_1 = b_1$. Considerando i coefficienti dei termini di grado $\alpha_1 = \beta_1$ si ottiene che $a_1 n = b_1 m$. Infine i termini noti devono essere uguali, cioè $n = m \neq 0$. Ma allora da $a_1 n = b_1 m$ seguirebbe che $a_1 = b_1 \neq 0$, e questo contraddice l'uguaglianza $2a_1 = b_1$ trovata sopra.

(4). *Soluzione alternativa.* Supponiamo per assurdo che $\alpha^2 2 = \beta^2$. Siano γ e δ esponenti tali che $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^\gamma h$ e $\omega^\delta \leq \beta < \omega^\delta k$, dove $h, k \in \omega \setminus \{0\}$. Allora

$$\omega^{\gamma+\gamma} \;\leq\; \alpha^2 \;<\; \alpha^2 2 \;<\; \omega^\gamma h \,\omega^\gamma h 2 \;=\; \omega^{\gamma+\gamma} h 2 \;<\; \omega^{\gamma+\gamma+1}.$$

Analogamente si ricava che $\omega^{\delta+\delta} \leq \beta^2 < \omega^{\delta+\delta+1}$. Dall'uguaglianza $\alpha^2 2 = \beta^2$ segue che $\gamma + \gamma = \delta + \delta$, e quindi $\gamma = \delta$. Se almeno uno tra α e β è finito, allora sono entrambi finiti; ma – tranne nel caso $\alpha = \beta = 0$ – questo non può accadere perchè non esistono numeri naturali $n, m \neq 0$ tali che $n^2 2 = m^2$ (è l'irrazionalità di $\sqrt{2}$). Possiamo dunque assumere che sia α che β siano infiniti, e quindi possiamo scrivere $\alpha = \lambda + n$ e $\beta = \mu + m$ dove λ, μ sono ordinali limite, e $n, m < \omega$. Notiamo che α successore se e solo se α^2 successore se e solo se $\alpha^2 2 = \beta^2$ successore se e solo se β successore. Dunque, dall'ipotesi segue che sia α che β sono successori, cioè $n, m \neq 0$.

$$\alpha^2 \;=\; (\lambda + n)(\lambda + n) \;=\; (\lambda + n)\lambda + (\lambda + n)m \;=\; \lambda^2 + \lambda n + n$$

e quindi

$$\alpha^2 2 \;=\; \lambda^2 + \lambda n + n + \lambda^2 + \lambda n + n \;=\; \lambda^2 2 + \lambda n + n.$$

(Sopra abbiamo usato le proprietà che $n + \lambda = \lambda$ e $\lambda n + \lambda^2 = \lambda(n + \lambda) = \lambda^2$ per ogni ordinale limite λ e per ogni naturale n). Analogamente:

$$\beta^2 \;=\; (\mu + m)(\mu + m) \;=\; (\mu + m)\mu + (\mu + m)m \;=\; \mu^2 + \mu m + m.$$

Consideriamo ora l'uguaglianza $\lambda^2 2 + \lambda n + n = \mu^2 + \mu m + m$. Intanto $n = m$ perchè sono i termini noti delle rispettive FNC, e perciò abbiamo $\lambda^2 2 + \lambda n = \mu^2 + \mu n$. Adesso, da $\omega^\gamma \leq \alpha, \beta < \omega^{\gamma+1}$ (dove $\gamma \geq 1$), segue che anche $\omega^\gamma \leq \lambda, \mu < \omega^{\gamma+1}$. Quindi $\lambda^2 2, \mu^2 \geq \omega^{\gamma+\gamma}$, mentre $\lambda n, \mu n < \omega^{\gamma+1} \leq \omega^{\gamma+\gamma}$. Per l'unicità delle FNC, abbiamo allora $\lambda n = \mu n$ e $\lambda^2 2 = \mu^2$. Dalla prima uguaglianza segue che $\lambda = \mu$, e questo contraddice la seconda uguaglianza.

Esercizio 2. Per ogni insieme infinito X denotiamo $\mathcal{P}_0(X) := \{A \subset X \mid |A| < |X|\}$.

1. Dimostrare che se $|\mathcal{P}_0(X)| = |X|$ allora $|X|$ è un cardinale regolare.
2. Dimostrare che se $|X|$ è un cardinale fortemente inaccessibile allora $|\mathcal{P}_0(X)| = |X|$.
3. Cosa si può dire della proprietà: "$|X|$ cardinale regolare $\Rightarrow |\mathcal{P}_0(X)| = |X|$"? È dimostrabilmente vera? È dimostrabilmente falsa? È indecidibile?

Soluzione. (1). Se per assurdo $|X| = \kappa$ fosse un cardinale singolare, prendendo $\nu = \mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, si avrebbe che $\kappa^\nu = |\{A \subset X \mid |A| = \nu\}| \leq |\mathcal{P}_0(X)| = |X| = \kappa$. Questo non è possibile perché $\kappa^\nu = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} > \kappa$.

(2). Sia $\kappa = |X|$ un cardinale fortemente inaccessibile. Notiamo intanto che per ogni cardinale $\nu < \kappa$, si ha che $\kappa^\nu = \kappa$. Infatti quando κ è limite, e l'esponente $\nu < \mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, abbiamo visto a lezione che $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$. Visto che κ è un limite forte, $\mu^\nu < \kappa$ per tutti i $\mu, \nu < \kappa$, e quindi $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu \leq \kappa \leq \kappa^\nu$. Adesso, l'applicazione $\Psi : \bigcup_{\nu<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, X) \to \mathcal{P}_0(X)$ dove $f \longmapsto \mathrm{Imm}(f)$ è suriettiva; dunque

$$\kappa \;=\; |X| \;\leq\; |\mathcal{P}_0(X)| \;\leq\; \left|\bigcup_{\nu<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, X)\right| \;\leq\; \sum_{\nu<\kappa} \kappa^\nu \;=\; \sum_{\nu<\kappa} \kappa \;=\; \kappa.$$

(2). *Soluzione alternativa.* Visto che $|X| = \kappa$, si ha che $|\mathcal{P}_0(X)| = |\mathcal{P}_0(\kappa)|$. Se $A \subseteq \kappa$ ha cardinalità $|A| < \kappa$ allora A è limitato perché κ e regolare, ed esiste $\alpha < \kappa$ con $A \subseteq \alpha$. Notiamo inoltre che $\alpha < \kappa \Rightarrow \alpha \in V_\kappa \Rightarrow \mathcal{P}(\alpha) \in V_k$. Questo dimostra l'inclusione $\mathcal{P}_0(\kappa) \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha) \subseteq V_\kappa$. Abbiamo visto a lezione che se κ è un cardinale fortemente inaccessibile allora $|V_\kappa| = \kappa$, e quindi concludiamo che $\kappa \leq |\mathcal{P}_0(\kappa)| \leq |V_\kappa| = \kappa$.

(3) Si tratta di un'implicazione indecidibile. Vediamo prima che è consistente che non valga, cioè che è consistente che esista un controesempio. A questo scopo assumiamo l'ipotesi $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (che contraddice l'ipotesi del continuo ma è consistente). In questo caso il cardinale regolare $\aleph_1$ soddisfa la proprietà:

$$|\mathcal{P}_0(\aleph_1)| = |[\aleph_1]^{\leq\aleph_0}| = (\aleph_1)^{\aleph_0} = \text{ (per Hausdorff) } = (\aleph_0)^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \aleph_2 > \aleph_1.$$

Vediamo ora che è consistente che l'implicazione valga, assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo (che è consistente). Ricordiamo che sotto questa ipotesi ogni cardinale limite è anche limite forte. Sia $|X| = \kappa$. Se il cardinale regolare κ è limite, allora è fortemente inaccessibile e la tesi segue da (2). Se invece $\kappa = \nu^+$ è successore, allora

$$|\mathcal{P}_0(X)| = |[\nu^+]^{\leq\nu}| = (\nu^+)^\nu = \text{ (per Hausdorff) } = \nu^\nu \cdot \nu^+ = \nu^+ \cdot \nu^+ = \nu^+ = \kappa.$$