Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta "ridotta" del 3 Giugno 2020
Soluzioni

**Esercizio 1.**

1. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^3 2 + \omega 5 + 3$ e $\omega 3 + 2$.
2. Si consideri la funzione *fattoriale* per ordinali definita ponendo $0! = 1$; $(\beta+1)! = \beta!(\beta+1)$; e $\lambda! = (\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma!)\lambda$ per $\lambda$ limite. Calcolare il valore di $\omega!$ e di $(\omega+3)!$.
3. Dimostrare che per ogni $\alpha$ e $\beta$ vale la disuguaglianza:

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta \ \leq\ \alpha + \alpha + \beta + \beta.$$

**Soluzione.** (1). Il quoziente è $\omega^2 2 + 1$ ed il resto è $\omega 2 + 3$ (che è minore di $\omega 3 + 2$). Infatti

$$(\omega 3+2)(\omega^2 2+1)+(\omega 2+3) = (\omega 3+2)\omega^2 2+(\omega 3+2)1+\omega 2+3 = \omega^3 2+\omega 3+\omega 2+3 \ =\ \omega^3 2+\omega 5+3.$$

(2). Il valore di $\omega!$ è $\omega^2$. Infatti $\omega! = \left(\bigcup_{n<\omega} n!\right) \cdot \omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$.

Il valore di $(\omega+3)!$ è $\omega^5+\omega^4 3+\omega^3 2+\omega^2$. Infatti, $(\omega+1)\cdot(\omega+2) = (\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)\cdot 2 = \omega^2+\omega 2+1$; $(\omega+1)\cdot(\omega+2)\cdot(\omega+3) = (\omega^2+\omega 2+1)(\omega+3) = (\omega^2+\omega 2+1)\cdot\omega+(\omega^2+\omega 2+1)\cdot 3 = \omega^3+\omega^2 3+\omega 2+1$. Quindi

$$(\omega+3)! \ =\ \omega!(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3) \ =\ \omega^2(\omega^3+\omega^2 3+\omega 2+1) \ =\ \omega^5+\omega^4 3+\omega^3 2+\omega^2.$$

(3). Siano $\xi$ e $\zeta$ gli esponenti massimi nelle forme normali di Cantor di $\alpha$ e $\beta$ rispettivamente; equivalentemente, sia: $\omega^\xi \leq \alpha < \omega^{\xi+1}$ e $\omega^\zeta \leq \beta < \omega^{\zeta+1}$.

Se $\xi < \zeta$ allora $\alpha+\beta = \beta$ e quindi $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = \beta+\beta \leq \alpha+\alpha+\beta+\beta$.

Se $\xi > \zeta$ allora $\beta+\alpha = \beta$ e quindi $\alpha+(\beta+\alpha)+\beta = \alpha+\beta+\beta \leq \alpha+\alpha+\beta+\beta$.

Infine supponiamo che $\xi = \zeta$, e con la divisione euclidea scriviamo $\alpha = \omega^\xi n + \rho$ e $\beta = \omega^\xi m + \vartheta$ dove $0 < n, m < \omega$ e $\rho, \vartheta < \omega^\xi$. Visto che $\rho + \omega^\xi = \vartheta + \omega^\xi = \omega^\xi$, si ha

$$\alpha+\beta+\alpha+\beta \ =\ \omega^\xi n+\rho+\omega^\xi m+\vartheta+\omega^\xi n+\rho+\omega^\xi m+\vartheta \ =\ \omega^\xi(n+m+n+m)+\vartheta \ =$$

$$=\ \omega^\xi n+\omega^\xi n+\omega^\xi m+\omega^\xi m+\vartheta \ =\ \omega^\xi n+\rho+\omega^\xi n+\rho+\omega^\xi m+\vartheta+\omega^\xi m+\vartheta \ =\ \alpha+\alpha+\beta+\beta.$$

**N.B.** L'idea di dimostrare questa proprietà per induzione transfinita su $\beta$ non pare quella migliore. Notiamo infatti che, per $\lambda$ limite, in generale $\alpha+\lambda+\alpha+\lambda \neq \bigcup_{\gamma<\lambda}(\alpha+\gamma+\alpha+\gamma)$. Ad esempio, $\omega+\omega = 1+\omega+1+\omega \neq \bigcup_{n<\omega}(1+n+1+n) = \omega$.

**Esercizio 2.**

1. Siano $V_1, V_2, V_3$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione rispettivamente 100, $\aleph_1$, e $\mathfrak{c}$.
   (a) Trovare la cardinalità degli spazi $V_i$ per $i = 1, 2, 3$.
   (b) Trovare la cardinalità degli spazi di applicazioni lineari $\mathcal{L}(V_i, V_j)$ per $1 \leq i, j \leq 3$.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{G} = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid f \text{ bigezione}\}$.

**Soluzione.** (1a). Notiamo intanto che se $V_1$ ha dimensione 100, allora $V_1 \cong \mathbb{R}^{100}$ e quindi $|V_1| = |\mathbb{R}^{100}| = \mathfrak{c}$. Adesso ricordiamo che se $\mathcal{B}$ è una base infinita di uno spazio vettoriale $V$, allora

$$V \;=\; \bigcup_{A\in\mathrm{Fin}(\mathcal{B})} \mathrm{Span}(A)$$

dove $\mathrm{Fin}(\mathcal{B})$ è la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $\mathcal{B}$. Per ogni insieme finito $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori, $\mathrm{Span}(A) := \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$, e quindi $|\mathrm{Span}(A)| = |\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$. Dunque se $\mathcal{B}$ è una base di uno spazio vettoriale $V$, allora

$$|V| \;=\; \left|\bigcup_{A\in\mathrm{Fin}(\mathcal{B})} \mathrm{Span}(A)\right| \;\leq\; \sum_{A\in\mathrm{Fin}(\mathcal{B})} |\mathrm{Span}(A)| \;=\; \mathfrak{c}\cdot|\mathrm{Fin}(\mathcal{B})| \;=\; \mathfrak{c}\cdot|\mathcal{B}|,$$

dove l'uguaglianza $|\mathrm{Fin}(\mathcal{B})| = \mathfrak{c}$ vale per ogni $\mathcal{B}$ infinito. Se $V_2$ ha dimensione $\aleph_1$, cioè se $V_2$ ha una base $\mathcal{B}_2$ di cardinalità $\aleph_1$, allora $\mathfrak{c} \leq |V_2| \leq \mathfrak{c}\cdot\aleph_1 = \mathfrak{c}$. e quindi $|V_2| = \mathfrak{c}$. Se $V_3$ ha dimensione $\mathfrak{c}$, cioè se $V_3$ ha una base $\mathcal{B}_3$ di cardinalità $\mathfrak{c}$, allora $\mathfrak{c} \leq |V_3| \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. e quindi anche $|V_3| = \mathfrak{c}$.

(1b). Ricordiamo che un'applicazione lineare è determinata dai suoi valori sui vettori di una base. Quindi, se $\mathcal{B}_i$ è una base di $V_i$, associando ad ogni applicazione lineare $f : V_i \to V_j$ la funzione $(f(b) \mid b \in \mathcal{B}_i)$, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{L}(V_i, V_j)$ e $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}_i, V_j)$, ed abbiamo che

$$|\mathcal{L}(V_i, V_j)| \;=\; |\mathrm{Fun}(\mathcal{B}_i, V_j)| \;=\; |V_j|^{|\mathcal{B}_i|}.$$

Visto che $|V_1| = |V_2| = |V_3| = \mathfrak{c}$ e che $|\mathcal{B}_1| = 100$, $|\mathcal{B}_2| = \aleph_1$, e $|\mathcal{B}_3| = \mathfrak{c}$, per ogni $j = 1, 2, 3$ abbiamo che

$$|\mathcal{L}(V_1, V_j)| = \mathfrak{c}^{100} = \mathfrak{c}; \quad |\mathcal{L}(V_2, V_j)| = \mathfrak{c}^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}; \quad |\mathcal{L}(V_3, V_j)| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

(2). $|\mathcal{G}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Intanto $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Fun}([0,1],[0,1])$, quindi $|\mathcal{G}| \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Per dimostrare l'altra disuguaglianza $2^{\mathfrak{c}} \leq |\mathcal{G}|$, possiamo ad esempio procedere in questo modo. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq [0, \frac{1}{2})$, sia $A' := 1 - A = \{1 - x \mid x \in A\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$, e sia $f_A : [0,1] \to [0,1]$ la funzione definita ponendo

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in A \cup A' \\ x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Segue direttamente dalla definizione che $f_A$ è una bigezione. Inoltre la funzione $\Phi : \mathcal{P}([0, \frac{1}{2})) \to \mathcal{G}$ dove $A \mapsto f_A$ è iniettiva. Infatti, se $A \neq B$ sono sottoinsiemi distinti di $[0, \frac{1}{2})$ allora

$$\{x \in [0,1] \mid f_A(x) = x\} \;=\; A \cup A' \;\neq\; B \cup B' \;=\; \{x \in [0,1] \mid f_B(x) \neq x\},$$

e quindi $f_A \neq f_B$.

Un modo alternativo, ma che richiede l'assioma di scelta, è il seguente. Ricordiamo anzitutto che ogni intervallo di numeri reali (tranne l'intervallo banale che consiste di un solo punto) ha la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$. Per ogni $A \subseteq [0, \frac{1}{2})$ avente cardinalità $\mathfrak{c}$, fissiamo una bigezione $f_A : A \to [0, \frac{1}{2})$. Notiamo che il complementare $A^c := [0,1] \setminus A \supseteq [\frac{1}{2}, 1]$, quindi $A^c$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$ per Cantor-Bernstein, ed esiste una bigezione $g_A : A^c \to [\frac{1}{2}, 1]$. È facile vericare che la seguente funzione $h_A : [0,1] \to [0,1]$ ottenuta unendo $f_A$ e $g_A$ è una bigezione:

$$h_A(x) \;=\; \begin{cases} f_A(x) & \text{se } x \in A \\ g_A(x) & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Notiamo infine che la corrispondenza $A \mapsto h_A$ è iniettiva. Infatti $A = \{x \mid h_A(x) \in [0, \frac{1}{2})\}$, e quindi $h_A = h_B \Rightarrow A = B$. Concludiamo che $2^{\mathfrak{c}} = |\mathrm{Fun}([0,1],[0,1])| \geq |\mathcal{G}| \geq |\mathcal{P}([0, \frac{1}{2}))| = 2^{\mathfrak{c}}$, e quindi $|\mathcal{G}| = 2^{\mathfrak{c}}$ per Cantor-Bernstein.