Analisi Matematica A
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

18 marzo 2019

1. Dire per quali α e $\beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale
$$\int_0^1 \sin(\pi x)\left(\operatorname{tg}(x-x^3)+\int_0^{\sin x}\left(\ln(1+t^2)-\frac{1}{1+t^2}\right)dt+x^4\right)x^{-\alpha}|\ln x|^\beta dx.$$

Dimostrazione. Spezziamo $\int_0^1 F(x)$ in $\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)+\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)$. Sia
$$f(x)=\operatorname{tg}(x-x^3)+\int_0^{\sin x}\left(\ln(1+t^2)-\frac{1}{1+t^2}\right)dt+x^4.$$
Sviluppiamo $f(x)$ per $x\to 0^+$
$$\operatorname{tg}(x-x^3)=x-x^3+\frac{x^3}{3}+o(x^3)=x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$
$$\int_0^{\sin x}\ln\left(1+t^2\right)\,dt=\int_0^{x+o(x^2)}\left(t^2+o(t^2)\right)\,dt=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
altrimenti
$$\int_0^{\sin x}\left(t^2+o(t^2)\right)\,dt=\frac{1}{3}(\sin x)^3+o(x^3)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
$$\int_0^{\sin x}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}1-t^2+o(t^2)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$
altrimenti
$$=\operatorname{arctg}\sin x=\operatorname{arctg}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$
In conclusione, per $x\to 0^+$, $F(x)$ si sviluppa
$$\begin{aligned}F(x)&=(\pi x+o(x^2))\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^3}{3}-x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)x^{-\alpha}\left|\ln x\right|^\beta\\&=\frac{\pi}{6}\left(x^4+o(x^4)\right)x^{-\alpha}\left|\ln x\right|^\beta.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx \text{ converge } \iff \begin{cases} \alpha < 5 & \forall \beta, \\ \alpha = 5 & \beta < -1. \end{cases}$$

D'altra parte, poiché

$$-\int_0^{\sin 1} \frac{1}{1+t^2}\,dt > -1$$

si ha $f(1) > 0$. Quindi

$$f(1) > 0 \implies \int_{\frac{1}{2}}^{1} F(x)\,dx \text{ converge } \iff$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)(1-x)^{\beta}\,dx < +\infty \iff \beta > -2.$$

In conclusione

$$\int_0^1 F(x)\,dx$$

è finito se e solo se:

$$\alpha < 5, \beta > -2 \qquad \text{o} \qquad \alpha = 5, -2 < \beta < -1.$$

$\square$

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \left(\sin\frac{1}{t}\right) t^{\alpha}\,(2+\cos t)\,\ln t\,dt.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni t risulta

$$1 \le 2 + \cos t \le 3$$

e visto che per $t \to +\infty$ si ha

$$t \sin\frac{1}{t} \to 1$$

esisterà un numero M tale che per ogni $t \ge M$ si abbia anche:

$$\frac{1}{2} \le t\sin\frac{1}{t} \le 2.$$

Dunque se $f(t)$ è la funzione integranda, possiamo osservare che per ogni $t \ge M$ si ha

$$\frac{1}{2}t^{\alpha-1}\ln t \le f(t) \le 6t^{\alpha-1}\ln t.$$

Se $\alpha \geq 0$ e $t > 1$ si ha inoltre

$$\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{2} \geq \frac{\ln t}{2t}$$

e integrando si ha (se $x > 1$)

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{2t}\,dt &= \left[\frac{\ln^2 t}{4}\right]_x^{x^2} = \frac{\ln^2 x^2 - \ln^2 x}{4} = \frac{4\ln^2 x - \ln^2 x}{4} \\ &= \frac{3}{4}\ln^2 x \to +\infty \qquad \text{per } x \to +\infty.\end{aligned}$$

Dunque per $\alpha \geq 0$ il limite cercato è $+\infty$.

Se invece $\alpha < 0$ sappiamo che $(\ln t) \cdot t^{\frac{\alpha}{2}} \to 0$ per $t \to \infty$ e quindi se t è abbastanza grande si ha

$$t^{\alpha-1}\ln t \leq t^{\alpha-1}t^{-\frac{\alpha}{2}} = t^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Sappiamo però che

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt$$

è convergente se $\frac{\alpha}{2} - 1 < -1$ cioè se $\alpha < 0$. Di conseguenza, per $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} t^{\alpha-1}\ln t\,dt = 0.$$

Ricapitolando, se $\alpha \geq 0$ il limite richiesto è $+\infty$, se $\alpha < 0$ il limite è 0. $\square$

3. Si consideri la funzione $F(x)$ così definita, per $x \neq 0$:

$$F(x) = \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2} dt.$$

Calcolare il limite di $F(x)$ per $x \to 0$ e verificare quindi che F può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$. Dire se la funzione estesa è di classe C^1 e calcolarne, se esiste, la derivata in $x = 0$.

Soluzione. Integrando per parti e poi riducendo ai fratti semplici si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{(1+t^2)\cdot t}\,dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\end{aligned}$$

Per $x \to 0$ si ha
$$\left[\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\right]_{x^2}^{3x^2} \to 1 - 1 = 0$$
dunque
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3x^2}{\sqrt{1+9x^4}} - \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+9x^4}} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dunque la funzione F si può estendere con continuità in $x = 0$ ponendo $F(0) = \ln 3$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, quando $x \neq 0$:
$$F'(x) = \frac{\operatorname{arctg}(3x^2)}{9x^4} \cdot 6x - \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} \cdot 2x \tag{1}$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2 + o(x^3)) \cdot 6x - (9x^2 + o(x^3)) \cdot 2x}{9x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0.$$

Dunque, per il teorema di Lagrange:
$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} F'(h) = 0$$
la funzione estesa è derivabile anche in $x = 0$ e la derivata è continua in tale punto. La derivata di F è chiaramente continua anche in ogni altro punto per (1) e quindi è di classe C^1. $\square$

Soluzione alternativa. Non è necessario trovare una primitiva della funzione integranda. Infatti essendo $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$ per $x \to 0$, si avrà:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt &= \lim_{x\to 0} \int_{x^2}^{3x^2} \left(\frac{1}{t} + o(1)\right) dt \\ &= \lim_{x\to 0} \left([\ln t]_{x^2}^{3x^2} + [o(1)]_{x^2}^{3x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3x^2}{x^2} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dopodiché la dimostrazione procede come prima. $\square$