Analisi Matematica A
Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 dicembre 2018

1. Dire per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}.$$

Soluzione. Possiamo applicare il criterio del rapporto. Si osservi che risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{n!} &= n+1, \\
\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} &= (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \\
\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!} &= (n^2+2n+1)(n^2+2n)\dots(n^2+1) \\
&\geq (n^2+1)^{2n+1} \geq n^{4n}.
\end{aligned}$$

Dunque posto
$$a_n = \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}$$
risulta
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha (n+1)^\beta \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\beta}}{n^{4n}} \sim \frac{n^{\alpha+\beta} e^\beta}{n^{4n}} \to 0$$
in quanto $n^{\alpha+\beta} \ll n^n < n^{4n}$. Visto che il rapporto di due termini consecutivi tende a zero la serie, a termini positivi, è convergente per ogni scelta dei parametri α e β. □

Soluzione alternativa. Ricordando che
$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n \tag{1}$$

si ha

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{\alpha n}{2}} \leq (n!)^{\alpha} \leq n^{\alpha n}$$

$$\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \leq (n^2)! \leq (n^2)^{n^2}$$

quindi se a_n è la successione di cui dobbiamo fare la somma si ha

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^{\alpha n} n^{\beta n}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{n^{\alpha+\beta}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{n^{\alpha+\beta}\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^n} \to 0.$$

Applicando il criterio della radice possiamo concludere che la serie converge per ogni α e ogni β.

Naturalmente invece di (1) si potevano usare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq n^n.$$

$\square$

2. Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$$

è convergente, divergente o indeterminata.

Soluzione. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta utilizzando il criterio del rapporto. Sia

$$a_n = \left|\frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}\right|.$$

Si ha allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{n+1}{n+2} \to |x|.$$

Dunque se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge. Se $|x| > 1$ il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge. Più precisamente, per $|x| > 1$ il termine generico in valore assoluto tende crescendo a $+\infty$, quindi per $x > 1$ la serie diverge mentre per $x < -1$ la serie è indeterminata.

Per $x = 1$ si ottiene la serie

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

che, essendo $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ e dunque è divergente in quanto quest'ultima serie è una serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ che sappiamo essere divergente quando $p \leq 1$.

Per $x = -1$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a segni alterni, infatti posto $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ risulta $a_n > 0$. Possiamo applicare il criterio di Leibniz, basterà verificare che $a_n \to 0$ e a_n decrescente. Che a_n sia infinitesima è chiaro in quanto abbiamo già osservato che $a_n \sim 1/\sqrt{n} \to 0$. Verifichiamo se è decrescente, cioè se vale:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Dovrebbe essere

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

cioè, elevando ambo i membri al quadrato

$$\frac{n+1}{n^2+4n+4} \leq \frac{n}{n^2+2n+1}$$

e moltiplicando per i denominatori basterà che sia

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 4n^2 + 4n$$

ovvero:

$$0 \leq n^2 + n - 1$$

che è verificata non appena $n \geq 1$. Dunque le ipotesi del teorema di Leibniz sono verificate e, di conseguenza, possiamo affermare che per $x = -1$ la serie converge (ma non assolutamente).

Naturalmente invece del criterio del rapporto si poteva usare il criterio della radice. Sarebbe però stato più delicato dimostrare che, per $|x| > 1$, il termine a_n tende crescendo a $+\infty$.

$\square$

3. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che

$$a_1 > b_1 > 0,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$
$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Dimostrare che, per ogni n, $a_n > b_n$ e che

$$a_{n+1} < a_n \qquad b_{n+1} > b_n$$

e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Soluzione. Abbiamo $a_1 > b_1$. Supponiamo $a_n > b_n$ e dimostriamo $a_{n+1} > b_{n+1}$. Questo è equivalente a

$$\frac{a_n + b_n}{2} > \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

cioè

$$(a_n + b_n)^2 > 4a_n b_n \iff (a_n - b_n)^2 > 0.$$

Si ha allora

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

D'altra parte

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n$$

quindi poiché $a_{n+1} < a_n$ si ha $b_{b+1} > b_n$.

Esiste allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

dunque

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{\alpha + \beta}{2}$$

e visto che $a_{n+1} \to \alpha$ si ottiene $\alpha = \beta$.

Ma $a_1 b_1 = a_n b_n$ da cui $\alpha\beta = \alpha^2$ quindi

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_1 b_1}.$$

□