Soluzioni secondo compitino analisi matematica

9 febbraio 2018

Esercizio 1. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x-6}\right).$$

Determinare il più grande intervallo contente il punti 3 *sul quale la funzione risulta essere invertibile. Dire se la funzione inversa risulta continua e derivabile e calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa* $f^{-1}(y)$ *nel punto* $y = 1$.

Dimostrazione. La funzione f è definita per x che soddisfa

$$\frac{2-x}{x-6} > 0,$$

ossia per $2 < x < 6$.

Calcoliamo ora la derivata di f per studiare la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{x-6}{2-x}\frac{-(x-6)-(2-x)}{(x-6)^2} = \frac{4}{(2-x)(x-6)}$$

e quindi nell'intervallo I di definizione di f la derivata f' è positiva; ne segue che la funzione f è monotona crescente ed ammette quindi inversa che è continua e derivabile.

Calcoliamo ora $\bar{x} = f^{-1}(1)$.

$$1 = \ln\frac{2-\bar{x}}{\bar{x}-6} \qquad e = \frac{2-\bar{x}}{\bar{x}-6}$$
$$2-\bar{x} = e\bar{x}-6e \qquad \bar{x} = \frac{2+6e}{1+e}.$$

Usando ora la formula della derivata della funzione inversa otteniamo che

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{2+6e}{1+e}\right)} = \frac{\left(2-\frac{2+6e}{1+e}\right)\left(\frac{2+6e}{1+e}-6\right)}{4} =$$
$$\frac{(2e+2-2-6e)(2+6e-6e-6)}{4(e+1)^2} = \frac{4e\cdot 4}{4(e+1)^2} = \frac{4e}{(e+1)^2}$$

□

Esercizio 2. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ln(1+2x) - e^{2x} + \cos(x) + \sin((\frac{9}{2}x^2 + x^4)}{x(tgx - x)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di tutte le espressioni presenti nel limite. In particolare abbiamo che:

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 - \frac{1}{4}(2x)^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$\sin\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 - \frac{1}{6}(2x-2x^2)^3 + o(x^4),$$

inoltre

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{6}8x^3 + \frac{1}{24}16x^4 + o(x^4),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\sin(\frac{9}{2}x^2 + x^4) = \frac{9}{2}x^2 + x^4 + o(x^4)$$

e

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Mettendo tutto insieme si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ln(1+2x) - e^{2x} + \cos(x) + \sin((\frac{9}{2}x^2 + x^4)}{x(tgx - x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 - \frac{8}{6}x^3 + 4x^4 - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4}{x(\frac{x^3}{3})} +$$

$$+ \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{9}{2}x^2 + x^4 + o(x^4)}{x(\frac{x^3}{3})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4(-4 + 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{24} + 1)}{\frac{x^4}{3}} = \frac{\frac{9}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{8}$$

□

Esercizio 3. *Dire per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$$

è uniformemente continua nel suo insieme di definizione.

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che la funzione è definita in $(0,\infty)$ e $f_\alpha(x)$ è uniformemente continua in $(0,a)$ se e solo se $\alpha > 0$. Grazie al Teorema di Heine-Cantor, gli unici problemi per l'uniforme continuità si possono avere all'infinito. Studiamo quindi la derivata $f'_\alpha(x)$.

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) + x^\alpha \frac{x^2}{1+x^2} \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x^2}.$$

Ricordandoci che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f'_\alpha(x) = 0 && \alpha < 3 \\ &\lim_{x\to\infty} f'_\alpha(x) = 3 - 2 = 1 && \alpha = 3 \\ &\lim_{x\to\infty} f'_\alpha(x) = \infty && \alpha > 3. \end{aligned}$$

In particolare abbiamo mostrato che la funzione è uniformemente continua in $\alpha \leq 3$ e non è uniformemente continua per una conseguenza del teorema di Lagrange in $\alpha > 3$. □

Esercizio 4. *Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e semplice della serie*

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} (-1)^n \left(-e^{\frac{1}{n}} + \sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$$

dimostrando, in particolare, che esiste $\bar{n}$ tale che la serie sia ben definita.

Dimostrazione. Sia

$$a_n = -e^{\frac{1}{n}} + \sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

abbiamo che

$$a_n = -1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + 1 + 1\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi $a_n > 0$ per n sufficientemente grande e quindi la serie risulta essere ben definita per $n \gg 0$.

Si ha convergenza assoluta se $\sum a_n^\alpha$ converge e, poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1,$$

si ha convergenza assoluta per $\alpha > 1$.

Per la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz e per far ciò studiamo la monotonia della successione a_n. Sia

$$b(x) = -e^x + \sin x + \cos x + \ln(1 + x) :$$

allora

$$b'(x) = -e^x + \cos x - \sin x + \frac{1}{1 + x}.$$

Notiamo ora che $b'(0) = 1$ e quindi $b(x)$ è crescente per $o < x < \bar{x}$ ossia la successione $b_n = b(n)$ è decrescente per n sufficientemente grande. Ne consegue quindi che a_n decresce per $\alpha > 0$ (mentre negli altri casi non è neanche un infinitesimo). In particolare la serie converge semplicemente per $\alpha > 0$. $\square$