Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 09/06/2017

Stra Federico*

15 giugno 2017

Esercizio 1

Testo

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(n \sin(1/n) - \cos(1/n)\right)^{\alpha}.$$

Soluzione

Cominciamo dalla convergenza assoluta. Usando gli sviluppi di Taylor di sin e cos centrati in 0, per $n \to \infty$ si ha

$$n \sin(1/n) - \cos(1/n) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Questo ci dice che per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x^n \left(n \sin(1/n) - \cos(1/n)\right)^{\alpha}\right|}{|x|^n n^{-2\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n \left(\frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha}}{|x|^n n^{-2\alpha}} = 3^{-\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

per cui, per il teorema del confronto asintotico, la serie assegnata converge assolutamente se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n n^{-2\alpha}.$$

Per questa serie possiamo applicare il criterio del rapporto (anche quello della radice andrebbe bene):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} (n+1)^{-2\alpha}}{|x|^n n^{-2\alpha}} = |x| \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n})\right)^{-2\alpha} = |x|,$$

perciò la serie converge assolutamente se $|x| < 1$ e diverge (il termine generale non è infinitesimo) se $|x| > 1$. Con $x = \pm 1$ si ha invece la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha}$, che come è noto converge se e solo se $a > 1/2$.

*stra@mail.dm.unipi.it

Passiamo ora alla convergenza semplice. Possiamo già dire che la serie assegnata converge semplicemente per $|x| < 1$, mentre non converge se $|x| > 1$ perché il termine generale non è infinitesimo. Per $x = 1$, la serie è definitivamente a termini positivi, quindi la convergenza semplice coincide con quella assoluta e sussiste solo per $\alpha > 1/2$. Studiamo l'ultimo caso, $x = -1$. Abbiamo a che fare con la serie (definitivamente) a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big(n \sin(1/n) - \cos(1/n)\big)^{\alpha}.$$

Se $\alpha \leq 0$ il termine generale, asintotico in modulo a $n^{-2\alpha}$, non è infinitesimo, quindi non c'è convergenza. Se $\alpha > 0$ invece il modulo del termine generale tende a zero decrescendo. Infatti definitivamente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dn}(n \sin(1/n) - \cos(1/n)) &= \sin(1/n) - \frac{\cos(1/n)}{n} - \frac{\sin(1/n)}{n^2} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(n^{-3})\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o(n^{-3})\right) - \left(\frac{1}{n^3} + o(n^{-3})\right) \\
&= -\frac{2}{3n^3} + o(n^{-3}) < 0.
\end{aligned}$$

Ne segue che in questo caso la serie converge per il teorema di Leibniz.

Attenzione! Moltissimi hanno usato impropriamente il teorema di Leibniz, applicandolo alla serie dello sviluppo asintotico invece che alla serie originaria. Il problema è che il teorema del confronto asintotico vale per serie positive e non per serie a segno alterno. Per esempio, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

hanno termini generali asintotici, ma la seconda converge (condizionatamente) per Leibniz, mentre la prima no.[1] E infatti la prima serie è a segno alterno, ma non è decrescente in modulo, pur essendo asintotica a una che lo è.

Esercizio 2

Testo

Dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{1/2} \left(\cos(e^x - 1) + \tan(x^3/6) - (1 + x^4)^{-1} + \int_0^x \sin(t + t^2)\, dt \right) x^{-\alpha} \left|\ln x\right|^{-\beta}\, dx.$$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)x^{-\alpha} \left|\ln x\right|^{-\beta}$ è continua in $(0, 1/2]$, quindi è integrabile su $[c, 1/2]$ per ogni $c \in (0, 1/2)$. Studiamone il comportamento per $x \to 0$. Sviluppiamo $f(x)$

[1] Dimostrarlo per esercizio!

in 0 fino al quarto ordine.

$$
\begin{aligned}
\cos(e^x - 1) &= \cos\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),
\end{aligned}
$$

$$
\tan(x^3/6) = \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad (1 + x^4)^{-1} = 1 - x^4 + o(x^4),
$$

$$
\int_0^x \sin(t + t^2)\,dt = \int_0^x \left(t + t^2 - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + o(x^4).
$$

Mettendo insieme i pezzi si trova

$$
f(x) = \frac{17}{24}x^4 + o(x^4).
$$

Quindi l'integrale assegnato converge se e solo se converge

$$
\int_0^{1/2} x^{4-\alpha}\,|\ln x|^{-\beta}\,dx.
$$

Le condizioni di convergenza di questo integrale sono ben note e nello specifico sono

$$
\alpha < 5 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 5 \land \beta > 1.
$$

Esercizio 3

Testo

Data l'equazione differenziale

$$
y' = \frac{x}{x^2 - 1}\sqrt[3]{y},
$$

si considerino i tre problemi di Cauchy con dato iniziale $y(\sqrt{2}) = 1$, o $y(\sqrt{2}) = -1$, o $y(\sqrt{2}) = 0$.

Dire per ognuno di questi tre problemi se esiste la soluzione e se è unica; inoltre, se tali soluzioni esistono, scriverle esplicitamente, indicandone l'intervallo massimale di esistenza.

Soluzione

Il termine di destra dell'equazione differenziale è ben definito e continuo nella regione $(x, y) \in E = (\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}) \times \mathbb{R}$ ed è localmente lipschitziano nella regione $U = (\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Nella prima regione vale l'Esistenza locale (Peano), nei punti della seconda l'Unicità locale (Cauchy-Lipschitz). Notiamo che al fine di studiare il problema assegnato possiamo sempre supporre $x > 1$ nel seguito, perché i tre dati di partenza si trovano in questo semipiano e non è possibile attraversare la retta $x = 1$ (non essendo qui definita l'equazione differenziale). Nella regione U possiamo separare le variabili perché y non si annulla e otteniamo

$$y'y^{-1/3} = \frac{x}{x^2 - 1},$$

da cui integrando

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 1) + c.$$

In questa regione pertando le soluzioni sono della forma

$$y(x) = \pm\left[\frac{1}{3}\log(x^2 - 1) + C\right]^{3/2} \tag{1}$$

Questa funzione è definita per $x > \sqrt{1 + e^{-3C}}$.

Per il problema con dato iniziale $y(\sqrt{2}) = 1$ si dovrà scegliere il segno positivo e si trova $C = 1$. Osserviamo che $1 < \sqrt{1 + e^{-3}} < \sqrt{2}$ e che

$$\lim_{x \searrow \sqrt{1+e^{-3}}} \left[\frac{1}{3}\log(x^2 - 1) + 1\right]^{3/2} = 0,$$

perciò questa soluzione si può prolungare ponendola uguale a 0 nell'intervallo $(1, \sqrt{1 + e^{-3}}]$. Questa è una soluzione definita sull'intervallo massimale $(1, \infty)$. Mostriamo che è unica. Ricorriamo al seguente delicato lemma (fatto a cui nessuno ha dedicato cura, quindi prestate particolare attenzione ora): se $y(\bar{x}) = 0$, allora $y(x) = 0$ per ogni $x < \bar{x}$. Questo è vero studiando il segno della derivata e sfruttando il teorema di Lagrange. Supponiamo per assurdo che ci sia $x_+ < \bar{x}$ tale che $y(x_+) > 0$. Sia[2]

$$x_0 = \min\{x \in (x_+, \bar{x}] : y(x) = 0\} \in (x_+, \bar{x}).$$

La proprietà chiave è che $y > 0$ in (x_+, x_0), quindi anche $y' > 0$. Per Lagrange allora

$$0 > y(x_0) - y(x_+) = y'(\xi)(x_0 - x_+) > 0,$$

assurdo. Analogamente si esclude che esista $y(x_-) < 0$.

Ricapitolando, il problema con dato iniziale $y(\sqrt{2}) = 1$ ha soluzione massimale unica

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \sqrt{1 + e^{-3}}, \\ \left[\frac{1}{3}\log(x^2 - 1) + 1\right]^{3/2} & \text{se } x > \sqrt{1 + e^{-3}}, \end{cases}$$

definita sull'intervallo $(1, \infty)$.

Vista la simmetria dell'equazione differenziale che ammette di cambiare il segno a y, la soluzione del problema con dato iniziale $y(\sqrt{2}) = -1$ esiste unica, è definita su $(1, \infty)$ ed è uguale a

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \sqrt{1 + e^{-3}}, \\ -\left[\frac{1}{3}\log(x^2 - 1) + 1\right]^{3/2} & \text{se } x > \sqrt{1 + e^{-3}}. \end{cases}$$

Passiamo a studiare il problema con dato iniziale $y(\sqrt{2}) = 0$. La funzione $y(x) = 0$ definita su $(1, \infty)$ è una soluzione massimale. Se esiste un'altra soluzione, nei punti dove

[2]Per esercizio dimostrare che è ben definito, ovvero che esiste il minimo e soddisfa le disuguaglianze richieste

non si annulla essa deve coincidere con (1) per un opportuno valore di C. Tale soluzione tende a 0 per $x \searrow \sqrt{1+e^{-3C}}$ e per il discorso di prima si può estendere in un unico modo ponendola uguale a 0 in $(1, \sqrt{1+e^{-3C}}]$. L'unica condizione che bisogna imporre è che $\sqrt{2} \in (1, \sqrt{1+e^{-3C}}]$, ovvero $C > 0$. Ne segue che tutte e sole le soluzioni (non identicamente nulle) sono definite su $(1, \infty)$ e sono della della forma

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \sqrt{1+e^{-3C}}, \\ \pm \left[\frac{1}{3}\log(x^2-1) + C\right]^{3/2} & \text{se } x > \sqrt{1+e^{-3C}}. \end{cases}$$

con $C > 0$.

Attenzione! Il mero fatto che il dato iniziale $(\sqrt{2}, 1)$ giaccia nella regione U in cui vale l'unicità locale non implica che il corrispondente problema di Cauchy ammetta un'*unica soluzione globale*! Tanto è vero che in questo esercizio la soluzione massimale esce dalla regione di unicità locale, e l'unicità globale deve essere dimostrata manualmente ricorrendo a Lagrange.