# Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 08/09/2017

Stra Federico*

11 settembre 2017

## Esercizio 1

### Testo

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{nx} \left[\tan\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\alpha}.$$

Lo studio della convergenza semplice per $x = 0$ e $0 < \alpha < 1$ è facoltativo e comporta un bonus.

### Soluzione

Cominciamo dalla convergenza assoluta. Usando gli sviluppi di Taylor centrati in 0 di tan e sin, si ha che per $n \to \infty$

$$e^{nx} \left[\tan\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\alpha} = e^{nx} \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\alpha}.$$

Il criterio del contronto asintotico ci assicura allora che la serie data converge assolutamente se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} n^{-\alpha}.$$
Questa serie può essere studiata con il criterio del rapporto o della radice. Con il rapporto si trova
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{(n+1)x}(n+1)^{-\alpha}}{e^{nx} n^{-\alpha}} = e^x \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = e^x,$$
con la radice
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nx} n^{-\alpha}} = e^x \lim_{n\to\infty} n^{\alpha/n} = e^x.$$
Con entrambi i metodi troviamo che la serie converge assolutemente se $x < 0$ e diverge se $x > 0$. Nessuno dei due criteri è risolutivo se $x = 0$. In tal caso però la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, che converge se e solo se $\alpha > 1$. Riassumendo, la serie data converge assolutamente se e solo se $x < 0 \vee (x = 0 \wedge \alpha > 1)$.

* stra@mail.dm.unipi.it

Passiamo alla convergenza semplice. Sappiamo già che essa sussiste nei casi sopracitati in cui si ha convergenza assoluta. Inoltre possiamo escluderla se $x > 0$, o $x = 0$ e $\alpha \leq 0$, perché il termine non è infinitesimo. L'ultimo caso che resta da trattare è $x = 0$ e $0 < \alpha \leq 1$. Cominciamo da $x = 0$ e $\alpha = 1$, che è ancora parte non facoltativa dell'esercizio. La serie assegnata diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(1/n)$ converge per Leibniz[1] e $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ converge per confronto asintotico con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, si ha che anche in questo caso la serie risulta convergente.

Passiamo infine alla parte facoltativa, $x = 0$ e $0 < \alpha < 1$. Sia

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left[ \tan\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^{\alpha} = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Il termine $a_n$ è infinitesimo. Ne segue che, se la sottosuccessione delle somme parziali $S_{2N}$ converge a un limite $L$, allora anche $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \to L + 0 = L$, e di conseguenza tutta la successione $S_N$ converge al limite $L$.[2] Possiamo calcolare $S_{2N}$ sommando i termini due alla volta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{k=1}^{N} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[ \tan\left(\frac{1}{2k}\right) + \sin\left(\frac{1}{(2k)^2}\right) \right]^{\alpha} - \left[ \tan\left(\frac{1}{2k-1}\right) - \sin\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\right) \right]^{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che, per $k \to \infty$, il termine di questa serie è[3]

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]^{\alpha} - \left[ \frac{1}{2k-1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]^{\alpha} \\ &\qquad = \left(\frac{1}{2k-1}\right)^{\alpha} \left\{ \left[ \frac{2k-1}{2k} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]^{\alpha} - \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]^{\alpha} \right\} \\ &\qquad = \left(\frac{1}{2k-1}\right)^{\alpha} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2k} + O\left(\frac{1}{k}\right) - 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \\ &\qquad = \left(\frac{1}{2k-1}\right)^{\alpha} O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k^{1+\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Per $\alpha > 0$ questi termini sono sommabili, pertanto $S_{2N}$ converge e anche tutta la serie di partenza.

## Esercizio 2

### Testo

Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{\infty} |\log(x+k)|^{\alpha} \frac{x}{(x+1)^2} \, dx.$$

[1] Nel compito, giustificare adeguatamente che $\tan(1/n)$ è positivo, decrescente e infinitesimo...

[2] Il che significa che la serie converge a $L$, per definizione.

[3] Ricordando che $(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t)$ se $t \to 0$.

### Soluzione

Per ogni $k \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{|\log(x+k)|^\alpha \frac{x}{(x+1)^2}}{|\log(x)|^\alpha \frac{1}{x}} &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+k)}{\log(x)}\right)^\alpha \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \\ &\overset{\text{H}}{=} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1/(x+k)}{1/x}\right)^\alpha = 1.\end{aligned}$$

A $+\infty$ la funzione integranda è quindi asintotica a $x^{-1}\log(x)^\alpha$, che è integrabile se e solo se $\alpha < -1$.

Se $k < 1$, la funzione integranda presenta una singolarità in $x = 1-k$ per valori negativi di $\alpha$. Più precisamente,

$$\lim_{x\to 1-k} \frac{|\log(x+k)|^\alpha \frac{x}{(x+1)^2}}{|x-(1-k)|^\alpha} = \frac{1-k}{k^2} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Vicino a $1-k$ pertanto la funzione integranda è asintotica a $|x-(1-k)|^\alpha$, che è integrabile se e solo se $\alpha > -1$. Questa condizione è in contrasto con quella precedentemente trovata, perciò l'integrale non è convergente per nessun valore di $\alpha$ se $k < 1$.

Sia ora $k = 1$. La funzione integranda presenta una singolarità in 0, dove si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\log(x+1)|^\alpha \frac{x}{(x+1)^2}}{x^{1+\alpha}} = 1.$$

Essa è quindi asintotica a $x^{1+\alpha}$, che è convergente se e solo se $1+\alpha > -1$. Siccome non ci sono altre singolarità in $(0,\infty)$, in questo caso la condizione di integrabilità è $-2 < \alpha < -1$.

Se infine $k > 1$, la funzione integranda risulta continua in $[0,\infty)$, per cui l'unica condizione necessaria e sufficiente è $\alpha < -1$ per assicurare l'integrabilità a $+\infty$.

Riassumendo,

- con $k < 1$ l'integrale non è mai convergente,
- con $k = 1$ l'integrale è convergente se e solo se $-2 < \alpha < -1$,
- con $k > 1$ l'intrgrale è convergente se e solo se $\alpha < -1$.

## Esercizio 3

### Testo

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = xe^{-x}[y(x)-1]^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

con $a = 1$ e $a = 3$, precisando se la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ o soltanto su un sottoinsieme; in tal caso dimostrare che, posto $I$ l'intervallo massimale di definizione della soluzione, si ha $1 < \ell(I) < 3$, dove $\ell$ denota la lunghezza dell'intervallo.

## Soluzione

Il membro di destra è localmente lipschitziano in $y$ uniformemente in $x$ su tutto il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertanto le soluzioni esistono per ogni dato iniziale e sono uniche globalmente.

Notiamo che la funzione costante $y(x) = 1$ definita su tutto $\mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale ed è quindi la soluzione massimale del primo problema di Cauchy assegnato. Ne segue inoltre che ogni altra soluzione non può assumere mai il valore 1, altrimenti violerebbe l'unicità. Questo ci giustifica a dividere per $[y(x) - 1]^2$ per separare le variabili. Integrando l'equazione

$$\frac{y'(x)}{[y(x) - 1]^2} = xe^{-x}$$

si ottiene

$$-\frac{1}{y(x) - 1} = -(x + 1)e^{-x} + C.$$

Imponendo il dato iniziale $y(0) = 3$ troviamo $C = 1/2$, da cui la soluzione del secondo problema di Cauchy risulta essere

$$y(x) = 1 + \frac{1}{(x + 1)e^{-x} - 1/2}.$$

Notiamo che in $x = 0$ il denominatore è positivo, perciò l'intervallo massimale di definizione $I$ è il più grande intervallo contenente 0 in cui $(x + 1)e^{-x} - 1/2 > 0$, ovvero

$$g(x) := x + 1 - e^x/2 > 0.$$

Si ha che $g(0) = 1/2 > 0$ e $g(1) = 2 - e/2 > 0$; inoltre la funzione $g$ è convessa, quindi $g(x) > 0$ per $x \in [0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ per un certo $\varepsilon$.[4] Da ciò segue che $[-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \subseteq I$, che implica $\ell(I) > 1$. Inoltre $g(-1) = -e^{-1}/2 < 0$ e $g(2) = 3 - e^2/2 < 0$, da cui $I \subsetneq (-1, 2)$, che implica $\ell(I) < 3$.

[4] Vale in $[0, 1]$ per convessità e poi in un intorno per continuità.