Analisi 1 e 2 - Quarto compitino
Soluzioni proposte

23 maggio 2017

Esercizio 1. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \frac{x(4-y^2)}{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

Soluzione proposta. Se $\alpha = 2$ oppure $\alpha = -2$ abbiamo le soluzioni costanti $y \equiv 2$ oppure $y \equiv -2$. Altrimenti si avrà $y(x) \neq \pm 2$ per ogni x per il teorema di unicità della soluzione al problema di Cauchy. Integriamo, dopo aver separato le variabili:

$$\begin{aligned} \int \frac{y \,\mathrm{d}\, y}{4-y^2} &= \int x \,\mathrm{d}\, x \\ -\frac{1}{2} \log \mid 4-y^2 \mid &= \frac{1}{2}x^2 + c_0 \\ \mid 4-y^2 \mid &= c_1 e^{-x^2} \\ 4-y^2 &= k e^{-x^2} \end{aligned}$$

Dove c_0, c_1 e k sono opportune costanti, $c_1 \geq 0$. Imponendo la condizione $y(0) = \alpha$ otteniamo $k = 4 - \alpha^2$, quindi abbiamo

$$y^2 = 4 + (\alpha^2 - 4)e^{-x^2}$$

Se $\alpha > 0$, allora anche $y(x) > 0$, quindi abbiamo

$$y(x) = \sqrt{4 + (\alpha^2 - 4)e^{-x^2}}.$$

Se invece $\alpha < 0$, vale anche $y < 0$, quindi

$$y(x) = -\sqrt{4 + (\alpha^2 - 4)e^{-x^2}}.$$

In ogni caso le soluzioni sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo l'argomento della radice sempre positivo. $\square$

Esercizio 2. *Sia, per* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_{\alpha,n}$ *la funzione definita da:*

$$f_{\alpha,n}(x) = e^x - \alpha x^n.$$

Dire, per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, *per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la funzione* $f_{\alpha,n}$ *risulta convessa su* $\mathbb{R}$.

Soluzione proposta. Consideriamo dapprima i casi semplici in cui $n = 0$ o $n = 1$ o $\alpha = 0$. In tutti e tre questi casi si ha

$$f''_{\alpha,n}(x) = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi $f_{\alpha,n}$ risulta convessa. D'ora in poi supporremo $\alpha \neq 0$ e $n \geq 2$.

Supponiamo che n sia pari. Allora: se $\alpha < 0$, $-\alpha x^n$ è convessa e $f_{\alpha,n}$ è somma di funzioni convesse, quindi convessa. Sia ora $\alpha > 0$ e poniamo $n = 2k$. Allora:

$$\lim_{x\to-\infty} f''_{\alpha,n}(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^x - \alpha 2k(2k-1)x^{2k-2} = -\infty & n > 2 \\ \lim_{x\to-\infty} e^x - 2\alpha = -2\alpha & n = 2 \end{cases}$$

quindi sicuramente la derivata seconda di $f_{\alpha,n}$ non è sempre maggiore o uguale a 0, dunque la funzione non è convessa.

Supponiamo ora che n sia dispari, $n = 2k+1$. Notiamo subito che per $\alpha < 0$ la funzione non è convessa. Infatti:

$$\lim_{x\to-\infty} f''_{\alpha,n}(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \alpha 2k(2k+1)x^{2k-1} = -\infty,$$

e come prima deduciamo che la derivata seconda di $f_{\alpha,n}$ non è sempre maggiore o uguale a 0. Sia ora $\alpha > 0$. Vediamo per quali $\alpha, n = 2k+1$ la funzione

$$e^x - \alpha(2k+1)2kx^{2k-1}$$

è positiva su $\mathbb{R}$. Notiamo subito che se $\forall x \leq 0$ vale tale disuguaglianza. Supponiamo quindi $x > 0$. Dunque il problema si riduce a trovare gli $\alpha, n = 2k+1$ per cui:

$$g(x) = \frac{e^x}{(2k+1)2kx^{2k-1}} \geq \alpha.$$

La funzione $g(x)$ è continua su $\mathbb{R}_+$ e $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, quindi ammette un punto di minimo, che troviamo ponendo uguale a 0 la sua derivata.

$$g'(x) = \frac{e^x}{2k(2k+1)}\left(\frac{1}{x^{2k-1}} - \frac{2k-1}{x^{2k-2}}\right) = \frac{e^x(x-2k+1)}{2k(2k+1)x^{2k-2}}.$$

In particolare, $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2k-1 = n-2$. Poniamo

$$\lambda(n) = \min g(x) = g(n-2) = \frac{e^{n-2}}{n(n-1)(n-2)^{n-2}}.$$

Allora $f_{\alpha,n}$ è convessa per $0 < \alpha \leq \lambda(n)$.
Riassumendo, $f_{\alpha,n}$ è convessa per:

- $n = 0, 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- $\alpha = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- n pari, $\alpha < 0$;

- n dispari, $0 < \alpha \leq \lambda(n)$.

$\square$

Esercizio 3. *Si determini l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y'' + y = \tan(x) + \sin(x)e^x.$$

Soluzione proposta. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, quindi una volta trovata una soluzione particolare tutte le altre differiranno per una soluzione dell'equazione omogenea associata

$$y'' = -y$$

che è l'equazione dell'oscillatore armonico ed ha quindi soluzioni

$$y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Poiché l'equazione è lineare, al fine di trovare una soluzione particolare possiamo cercare separatamente soluzioni delle equazioni

$$\begin{aligned} y'' + y &= \tan(x) \\ y'' + y &= \sin(x)e^x \end{aligned}$$

e poi sommarle. Iniziamo a studiare l'equazione

$$y'' + y = \tan(x)$$

ed applichiamo il metodo della variazione delle costanti, ovvero cerchiamo soluzioni nella forma

$$c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos(x)$$

ottenendo da risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = 0 \\ c_1'(x)\cos(x) - c_2'(x)\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

da cui, moltiplicando la prima equazione per $\sin(x)$ e la seconda per $\cos(x)$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\sin^2(x) + c_2'(x)\sin(x)\cos(x) = 0 \\ c_1'(x)\cos^2(x) - c_2'(x)\sin(x)\cos(x) = \sin(x) \end{cases}$$

che ha soluzione in

$$\begin{cases} c_1'(x) = \sin(x) \\ c_2'(x) = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}. \end{cases}$$

Integrando otteniamo immediatamente $c_1 = -\cos(x)$, calcoliamo invece

$$c_2(x) = -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = -\int \frac{\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$$

in cui possiamo eseguire la sostituzione $u = \sin(x)$, da cui $\mathrm{d}\,u = \cos(x)\,\mathrm{d}\,x$ ottenendo

$$c_2(u) = \int \frac{-u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{1-u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}\,u - \int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}\,u = u - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}\,u$$

ovvero, sostituendo nuovamente $u = \sin(x)$,

$$c_2(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right).$$

Concludendo la soluzione particolare di questa equazione risulta essere

$$\begin{aligned} y(x) &= -\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x)\log\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right). \end{aligned}$$

Cerchiamo ora la soluzione di

$$y'' + y = \sin(x)\,\mathrm{e}^x$$

nella forma $y(x) = (A\sin(x) + B\cos(x))\,\mathrm{e}^x$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Derivando due volte questa funzione otteniamo facilmente che deve essere verificata la condizione

$$y'' + y = [(A-2B)\sin(x) + (2A+B)\cos(x)]\,\mathrm{e}^x = \sin(x)\,\mathrm{e}^x$$

ovvero si deve risolvere il sistema reale

$$\begin{cases} A - 2B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

che dà luogo alla soluzione

$$\begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

In conclusione possiamo ora scrivere tutte le soluzioni dell'equazione, le quali risultano essere, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, tutte e sole le seguenti

$$A\sin(x) + B\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\log\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right) + \frac{1}{5}(\sin(x) - 2\cos(x))\,\mathrm{e}^x.$$

Un metodo alternativo, ma fortemente sconsigliato vista la sensibilmente acuita difficoltà dei calcoli, per trovare una soluzione particolare per la seconda equazione

$$y'' + y = \sin(x)\,\mathrm{e}^x$$

consiste semplicemente nell'applicare nuovamente il metodo di variazione delle costanti. Si ottiene dunque il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = 0 \\ c_1'(x)\cos(x) - c_2'(x)\sin(x) = \sin(x)e^x \end{cases}$$

e risolvendolo otteniamo

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\sin(2x) \\ c_2'(x) = -\,\mathrm{e}^x\sin^2(x). \end{cases}$$

Iniziamo ad integrare c_1' due volte per parti ottenendo

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin(2x)\,\mathrm{d}\,x &= \mathrm{e}^x \sin(2x) - 2\int \mathrm{e}^x \cos(2x) = \\ &= \mathrm{e}^x \sin(2x) - 2\,\mathrm{e}^x \cos(2x) - 4\int \mathrm{e}^x \sin(2x)\end{aligned}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^x(\sin(2x) - 2\cos(2x)).$$

A questo punto, sfruttando il risultato dell'integrale precedente, l'integrazione per parti di c_2' risulta più agevole e restituisce

$$\begin{aligned}c_2 &= -\int \mathrm{e}^x \sin^2(x) = -\,\mathrm{e}^x \sin^2(x) + 2\int \mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x) = \\ &= -\,\mathrm{e}^x\left(\sin^2(x) - \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^x \sin(2x) + \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^x \cos(2x)\right).\end{aligned}$$

□