Correzione del compito di Analisi 1 e 2
del giorno 08/09/2016

Stra Federico*

9 settembre 2016

Esercizio 1

Testo

Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$x - \int_0^x e^{-t^2} dt = \alpha.$$

Dire per quali valori di α l'equazione ammette soluzioni, e quante.

Soluzione

Sia $f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2} dt$. Osserviamo che f è una funzione di classe C^∞. Siccome gli integrali $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = -\int_0^{-\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$ convergono a un valore finito, si ha che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Unitamente alla continuità, questo prova che f è surgettiva, ovvero per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione di $f(x) = \alpha$.

Verifichiamo ora che f è iniettiva. Per far ciò, calcoliamo la derivata prima. Si ha che

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} \geq 0,$$

con l'uguaglianza $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Pertanto f è strettamente crescente[1], il che implica l'unicità della soluzione per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Testo

Studiare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta < \alpha$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^\alpha}{n^3 + 3n^\beta + 5}\right).$$

*stra@mail.dm.unipi.it

[1] f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ perché $f' > 0$ in questo intervallo ed è strettamente crescente anche in $[0, \infty)$; allora è strettamente crescente anche in tutto $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, \infty)$.

Soluzione

Sia $a_n = n^\alpha/(n^3 + 3n^\beta + 5)$. Osserviamo preliminarmente che $a_n > 0$ per ogni n, per cui $\log a_n$ esiste sempre come numero reale. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \alpha > 3, \\ 0 & \alpha < 3, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \begin{cases} \infty & \alpha > 3, \\ -\infty & \alpha < 3, \end{cases}$$

e infine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \begin{cases} \infty & \alpha > 3, \\ -\infty & \alpha < 3. \end{cases}$$

Consideriamo ora $\alpha = 3$ (e dunque $\beta < 3$). Riscriviamo

$$\frac{n^\alpha}{n^3 + 3n^\beta + 5} = 1 - \frac{3n^\beta + 5}{n^3 + 3n^\beta + 5}$$

e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^\beta + 5}{n^3 + 3n^\beta + 5} = 0$$

perché $\beta < \alpha = 3$. Questo fatto implica che

$$\log a_n = \log\left(1 - \frac{3n^\beta + 5}{n^3 + 3n^\beta + 5}\right) \sim -\frac{3n^\beta + 5}{n^3 + 3n^\beta + 5},$$

per $n \to \infty$, ovvero, più esplicitamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{-\frac{3n^\beta+5}{n^3+3n^\beta+5}} = 1.$$

Il criterio del rapporto ci dice dunque che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^\beta + 5}{n^3 + 3n^\beta + 5},$$

la quale converge a un valore finito se $\beta - 3 < -1$, ovvero $\beta < 2$, e converge a $-\infty$ se $2 \le \beta < 3$.

Riassumendo, la serie assegnata per

- $\alpha < 3$, $\beta < \alpha$: converge a $-\infty$,
- $\alpha > 3$, $\beta < \alpha$: converge a ∞,
- $\alpha = 3$, $\beta < 2$: converge a un numero reale negativo,
- $\alpha = 3$, $2 \le \beta < 3$: converge a $-\infty$.

Esercizio 3

Testo

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = 2x - 1, \\ y(0) = A, \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}$, (ovviamente per i valori di A per i quali esiste soluzione) precisando, al variare di A, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione stessa, di classe C^1.

Soluzione

Dal momento che le variabili sono separate, una semplice integrazione sul generico intervallo $[0, \bar{x}]$ fornisce immediatamente

$$\int_0^{\bar{x}} (2x-1)dx = \int_0^{\bar{x}} y(x)y'(x)dx = \int_{y(0)}^{y(\bar{x})} y\,dy$$
$$\bar{x}^2 - \bar{x} = \frac{1}{2}y(\bar{x})^2 - \frac{1}{2}A^2.$$

Osserviamo che in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ abbiamo unicità locale delle soluzioni. Ciò significa che ogni ramo di una soluzione contenuto in questo dominio deve coincidere con $\sqrt{2x^2 - 2x + A^2}$ oppure con $-\sqrt{2x^2 - 2x + A^2}$, a seconda che si trovi nella regione $y > 0$ oppure $y < 0$.

Il discriminante del polinomio di secondo grado sotto radice è $4 - 8A^2$. Quando questo è negativo, ovvero per $A^2 > 1/2$, l'espressione sotto radice non si annulla mai, quindi abbiamo che per $A > 1/\sqrt{2}$ la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è $y(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + A^2}$, mentre per $A < -1/\sqrt{2}$ la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è $y(x) = -\sqrt{2x^2 - 2x + A^2}$.

Per contro, quando $0 < A^2 < 1/2$ le soluzioni $y(x) = \pm\sqrt{2x^2 - 2x + A^2}$ passanti per $(0, A)$ sono definite sull'intervallo massimale

$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 2A^2}}{2}\right]$$

Ovviamente, per $A > 0$ bisogna prendere il segno positivo davanti alla radice e viceversa.

Come caso limite, per $A = 0$ abbiamo che entrambe le funzioni $y(x) = \sqrt{2x^2 - 2x}$ e $y(x) = -\sqrt{2x^2 - 2x}$ definite sull'intervallo massimale $(-\infty, 0]$ sono soluzioni del dato iniziale $A = 0$. In questo caso non c'è l'unicità (del resto il punto iniziale $(0, 0)$ giace fuori dal domino in cui abbiamo l'unicità locale).

Particolare attenzione richiede il caso $A^2 = 1/2$. Discutiamo quando $A = 1/\sqrt{2}$. Abbiamo che deve valere

$$y(x)^2 = 2x^2 - 2x + 1/2 = \frac{(2x-1)^2}{2},$$

da cui $y(x) = \pm\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$. La scelta del segno può cambiare solo in corrispondenza del punto $(1/2, 0)$, altrimenti si produrrebbe una discontinuità. Tuttavia neanche in tale punto il segno può cambiare, altrimenti la funzione non sarebbe derivabile. Ne consegue che la soluzione è $y(x) = -\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$ ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. Analogamente, per $A = -1/\sqrt{2}$ la soluzione massimale è $y(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{2}}$ ed è globale. Da notare che, pur non essendo garantita a priori, anche in questi due casi si ha l'unicità della soluzione.

Nella Figura 1 sono rappresentate alcune delle soluzioni appartenenti alle varie classi trovate.

Come utile (e pignolo) esercizio, dire cosa sarebbe cambiato se il problema di Cauchy assegnato fosse stato il "quasi equivalente"

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x-1}{y}, \\ y(0) = A. \end{cases}$$

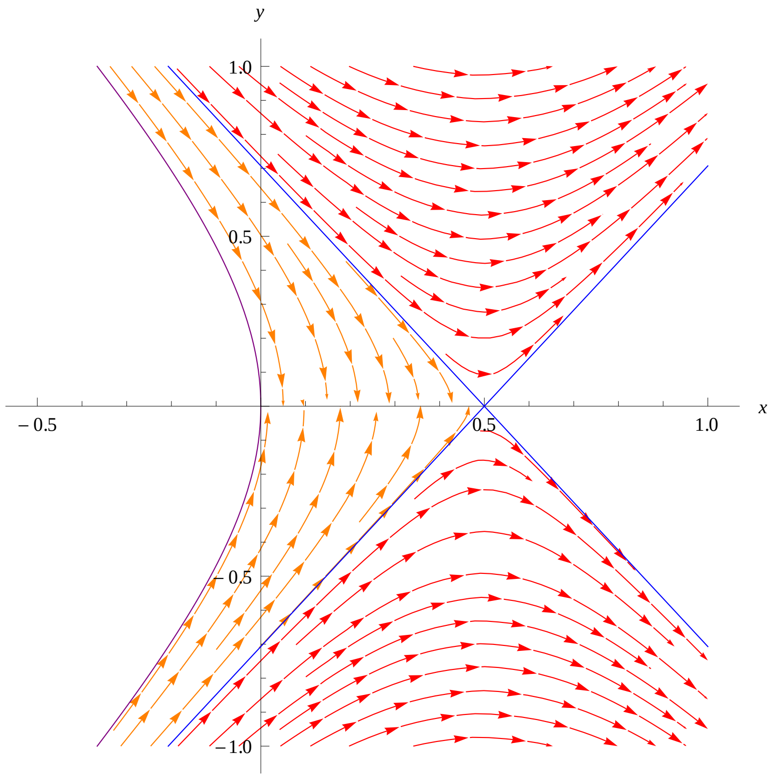

Figura 1: Alcune soluzioni dell'esercizio 3. Le traiettorie rosse corrispondono a un dato iniziale $A^2 > 1/2$; le traiettorie arancioni corrispondono a un dato iniziale $0 < A^2 < 1/2$; le due rette blu corrispondono ai dati iniziali $A = \pm 1/\sqrt{2}$; le due traiettorie viola corrispondono al dato iniziale $A = 0$.