Compitino di Analisi 1 e 2

Soluzioni

4 febbraio 2016

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\arctan x},$$

definita per $x \neq 0$, dire se f si prolunga ad una funzione F continua di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Dire se questa funzione $F \in C^1(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, calcolare $F'(0)$.

Soluzione. Ricordando alcuni limiti notevoli otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\arctan x} = 1.$$

Dunque ponendo

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

tale funzione prolunga f a $\mathbb{R}$, ed è continua. Per $x \neq 0$ si ha

$$F'(x) = f'(x) = \frac{e^x \arctan x - \frac{1}{1+x^2}(e^x - 1)}{(\arctan x)^2}.$$

Il limite di $F'(x)$ per $x \to 0$ è una forma indeterminata, ma si può calcolare applicando il teorema di de l'Hôpital. Infatti il denominatore e il numeratore sono derivabili in un intorno di zero, e

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x + \frac{1}{1+x^2} e^x - \frac{1}{1+x^2} e^x - \frac{-2x}{(1+x^2)^2}(e^x - 1)}{2\frac{1}{1+x^2} \arctan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^x}{2}(1+x^2) + \frac{e^x - 1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x} \right] = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} F'(x).$$

Dunque, per un teorema noto, F è di classe C^1, e $F'(0) = 1/2$.

Esercizio 2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α definita da

$$f_\alpha(x) = e^x - \alpha x^3$$

risulta convessa in $\mathbb{R}$.

Soluzione. Dato che f_α è di classe C^∞, è condizione necessaria e sufficiente che $f''_\alpha(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché

$$f''_\alpha(x) = e^x - 6\alpha x,$$

si nota subito che, se $\alpha < 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} f''_\alpha(x) = -\infty,$$

dunque f''_α è negativa in qualche punto, e f_α non può essere convessa. Se $\alpha = 0$ la funzione è e^x, che è convessa. Per $\alpha > 0$, osserviamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f''_\alpha(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f''_\alpha(x) = +\infty.$$

Quindi f''_α ammette un minimo, nel punto tale che $f'''_\alpha = e^x - 6\alpha = 0$, ovvero $x = \log(6\alpha)$. Sostituendo in f''_α e imponendo la condizione di convessità si ottiene

$$f''_\alpha(\log(6\alpha)) = 6\alpha - 6\alpha \log(6\alpha) \geq 0$$
$$\alpha \leq \frac{e}{6}.$$

Esercizio 3. Si consideri per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α definita da

$$f_\alpha(x) = e^{-2x}(x^2 + \alpha x + 1/2).$$

- Dire per quali valori di α la funzione f_α risulta invertibile.
- Sia, nel caso $\alpha = 1/2$, $\phi(y)$ la funzione inversa di f_α. Calcolare
$$\phi'(2/e^2).$$

Soluzione. Essendo f_α di classe C^∞, l'invertibilità equivale alla (stretta) monotonia. Si ha

$$f'_\alpha(x) = e^{-2x}[-2x^2 + 2(1-\alpha)x - 1 + \alpha].$$

Dato che f'_α tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$, l'unica possibilità è che si abbia $f'_\alpha(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero $-2x^2 + 2(1-\alpha)x - 1 + \alpha$ deve avere discriminante non positivo.

$$\Delta = 4(1-\alpha)^2 + 8(1-\alpha) \leq 0$$

$$0 \leq 1 - \alpha \leq 2 \iff -1 \leq \alpha \leq 1$$

Osserviamo che per $\alpha = \pm 1$ la derivata si annulla in punti isolati, dunque la funzione non può avere tratti costanti e risulta ugualmente invertibile.

Nel caso $\alpha = 1/2$, indicando la funzione con f per semplicità, notiamo che

$$f(1) = 2/e^2.$$

Dunque, derivando l'espressione $\phi(f(x)) = x$ e calcolandola nel punto $x = 1$ si ha

$$1 = \phi'(f(x)) \cdot f'(x) = \phi'(2/e^2) \cdot f'(1)$$

da cui

$$\phi'(2/e^2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{2e^2}{3}.$$