Correzione del quarto compitino di Analisi 1 e 2 A.A. 2014/2015

Luca Ghidelli, Giovanni Paolini, Leonardo Tolomeo

24 maggio 2015

Esercizio 1

Testo. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2}{e^{8y}} \\ y(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

Prima soluzione. Supponiamo che una certa $y(x)$ sia soluzione del precedente problema di Cauchy, e definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$. Moltiplicando entrambi i membri per e^{8y} e integrando rispetto a x da $\frac{1}{2}$ a un generico $\bar{x} \in I$, si ottiene che

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\bar{x}} e^{8y(x)} y'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\bar{x}} 3x^2\, \mathrm{d}x.$$

Calcoliamo ora questi due integrali. In quello di sinistra è possibile effettuare il cambio di variabile $y(x) = t$, poiché $y'(x) > 0$ per ogni $x \in I$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\bar{x}} e^{8y(x)} y'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{y(\frac{1}{2})}^{y(\bar{x})} e^{8t}\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{y(\bar{x})} e^{8t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\big(e^{8y(\bar{x})} - 1\big);$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\bar{x}} 3x^2\, \mathrm{d}x = \bar{x}^3 - \frac{1}{8}.$$

Quindi si ottiene:

$$\frac{1}{8}\big(e^{8y(\bar{x})} - 1\big) = \bar{x}^3 - \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad e^{8y(\bar{x})} = 8\bar{x}^3.$$

Questa uguaglianza è possibile solo per $\bar{x} > 0$. D'altra parte per tutti gli $\bar{x} > 0$ tale uguaglianza è equivalente a

$$y(\bar{x}) = \frac{1}{8}\log(8\bar{x}^3) = \frac{3}{8}\log(2\bar{x}).$$

Quanto fatto è sufficiente a dimostrare che $\bar{x} > 0$ per ogni $\bar{x} \in I$, e che se y è una soluzione al problema di Cauchy originale allora deve necessariamente valere

$$y(\bar{x}) = \frac{3}{8}\log(2\bar{x}).$$

È facile verificare che questa è una soluzione (anzi, lo deve essere necessariamente per i calcoli già fatti), ed è definita su $I = (0, +\infty)$.

Seconda soluzione. Dopo aver separato le variabili come nella prima soluzione, ottenendo l'equazione

$$e^{8y} y' = 3x^2,$$

si può calcolare una primitiva di entrambi i membri (come funzioni della variabile x). La differenza rispetto alla prima soluzione è che si effettua un'integrazione indefinita piuttosto che una definita. Si ottiene allora che deve esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{8} e^{8y(x)} = x^3 + c,$$

su tutto l'intervallo massimale I su cui è definita $y(x)$. Imponendo la condizione $y(\frac{1}{2}) = 0$ si trova che $c = 0$, e si conclude come nella prima soluzione.

Terza soluzione. Il metodo della separazione delle variabili, utilizzato nelle prime due soluzioni, garantisce (quasi) automaticamente esistenza e unicità della soluzione. Un modo alternativo di procedere era osservare che

$$y(x) = \frac{3}{8} \log(2x) \quad \text{per } x > 0 \tag{1}$$

è una soluzione del problema di Cauchy, e poi dimostrare l'unicità della soluzione tramite il teorema di Cauchy-Lipschitz. Le ipotesi di tale teorema sono verificate poiché la funzione $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{3x^2}{e^{8y}}$$

è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Rimane da dimostrare che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è proprio $I = (0, +\infty)$, e questo segue dal fatto che la (1) non si prolunga con continuità in $x = 0$.

Errori comuni e valutazione. Questo esercizio valeva complessivamente 12 punti. Tutti gli studenti sono riusciti perlomeno ad impostare uno svolgimento basato sulla separazione delle variabili, ottenendo per questo almeno 5 punti. Il punteggio attribuito dipendeva dagli eventuali errori commessi, secondo la seguente scaletta.

- Non dire che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(0, +\infty)$: -1 punto. Per non perdere punti era sufficiente osservarlo "a posteriori" (notando che $\log(2x)$ è definita per $x > 0$), anche se in verità la maggior parte degli studenti non lo ha argomentato in modo soddisfacente.

- Sbagliare in modo veniale a calcolare la costante c della seconda soluzione: -1 punto.

- Sbagliare in modo veniale a ricavare la soluzione: -1 punto.

- Effettuare gravi errori di conto, oppure fermarsi a formule implicite come $e^{8y(x)} = 8x^3$ senza concludere: da -5 a -7 punti. Come "gravi errori di conto" citiamo per esempio:

– Dimenticare la costante c (della seconda soluzione) e reintrodurla solamente dopo aver ricavato $y(x)$, ottenendo cioè qualcosa del tipo

$$y(x) = \frac{3}{8}\log(2x) + c.$$

Ovviamente non è la stessa cosa aggiungere una costante prima o dopo aver preso un logaritmo.

– Più in generale, utilizzare proprietà inedite dei logaritmi come

$$\log(a+b) = \log(a)\log(b) \quad \text{oppure} \quad \log(a+b) = \log(a) + \log(b).$$

Quella giusta è $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Esercizio 2a

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 10y' + 26y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti con $y(0), y'(0)$ assegnati, per cui la soluzione esiste ed è unica. Consideriamo il polinomio caratteristico dell'equazione:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0.$$

Le sue radici complesse sono $5 \pm i$, per cui la soluzione generale del problema di Cauchy è della forma

$$ae^{5x}\cos(x) + be^{5x}\sin(x).$$

Imponendo le condizioni in 0, si ottiene:

$$\begin{cases} y(0) = a = 1 \\ y'(0) = 5a + b = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene $a = 0$ e $b = -5$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è:

$$e^{5x}\cos(x) - 5e^{5x}\sin(x).$$

Valutazione. Questa metà di esercizio valeva 9 punti. La maggioranza degli studenti ha preso punteggio pieno.

- Scrivere la soluzione generale dell'equazione valeva 5 punti, imporre le condizioni in 0, risolvere il sistema valeva gli altri 4 punti.
- Trovare solo il coefficiente di $e^{5x}\cos(x)$ valeva 1 punto.
- Per errori di conto sono stati tolti 1 o 2 punti, a seconda dei casi.
- Per altri tipi di errori si è valutato caso per caso, tenendo conto della scaletta appena riportata.

Esercizio 2b

Testo. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 10y' + 26y = 25\cos(x) + 10\sin(x)$$

Soluzione. L'equazione omogenea associata $y''-10y'+26y = 0$ è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 26$, il quale ha radici $\lambda_{1,2} = 5 \pm i$. Dunque una base delle soluzioni dell'equaizione omogenea è data da $y_1 = e^{5x}\cos(x)$, $y_2 = e^{5x}\sin(x)$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea si scrivono come

$$y(x) = c_1 e^{5x}\cos(x) + c_2 e^{5x}\sin(x),$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie reali.

La funzione $y_0(x) = \cos(x)$, definita su tutto $\mathbb{R}$, è una soluzione dell'equazione dell'esercizio. Infatti

$$y_0'' - 10y_0' + 26y_0 = -\cos(x) + 10\sin(x) + 26\cos(x) = 25\cos(x) + 10\sin(x).$$

Tutte le soluzioni dell'equazione $y'' - 10y' + 26y = 25\cos(x) + 10\sin(x)$ si ottengono sommando una sua soluzione particolare con tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y'' - 10y' + 26y = 0$, quindi sono le funzioni scrivibili nella seguente forma:

$$y(x) = c_1 e^{5x}\cos(x) + c_2 e^{5x}\sin(x) + \cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Osservazione. Per trovare la soluzione particolare è euristicamente sensato tentare di trovare soluzioni della forma

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Siccome $y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ e $y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$, si ha che

$$y'' - 10y' + 26y = \cos(x)(25A - 10B) + \sin(x)(25B + 10A),$$

ed è chiaro che ponendo $A = 1, B = 0$, si ottiene una soluzione dell'equazione.

In alternativa è possibile (ma molto più contoso) fare ricorso al metodo della variazione delle costanti. Nel nostro caso abbiamo un'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine con termine noto $f(x) = 25\cos(x) + 10\sin(x)$ e con $y_1 = e^{5x}\cos(x), y_2 = e^{5x}\sin(x)$ due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata. Il metodo consiste nella ricerca di soluzioni della forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

e permette di trovare c_1, c_2 risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} +c_1' e^{5x}\cos(x) + c_2' e^{5x}\sin(x) = 0 \\ -c_1' e^{5x}\sin(x) + c_2' e^{5x}\cos(x) + 5(c_1' e^{5x}\cos(x) + c_2' e^{5x}\sin(x)) = 25\cos(x) + 10\sin(x) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare nelle incognite c_1', c_2' si trova

$$c_1'(x) = -\sin(x)e^{-5x}(25\cos(x)+10\sin(x)), \quad c_2'(x) = \cos(x)e^{-5x}(25\cos(x)+10\sin(x)).$$

Delle funzioni che vanno bene sono

$$c_1(x) = e^{-5x}(5\sin(x)\cos(x) - 1), \quad c_2'(x) = -5e^{-5x}\cos^2(x).$$

Esse danno luogo alla soluzione particolare

$$y(x) = \cos(x)$$

Errori frequenti. L'esercizio è stato svolto correttamente dalla maggior parte dei partecipanti al compito. Coloro che hanno ricercato soluzioni particolari del tipo $A\cos(x)+B\sin(x)$ hanno perlopiù commesso lievi errori di conto (un segno sbagliato, ecc). Molti ragazzi hanno provato a trovare soluzioni particolari del tipo $x(A\cos(x) + B\sin(x))$. Un tale tentativo non può avere successo perché il polinomio caratteristico dell'equazione inomogenea non ha come radici $\pm i$. La gran parte degli errori (soprattutto di conto) è stata commessa dai partecipanti che hanno intrapreso il metodo della variazione delle costanti.

In generale, quasi nessuno ha controllato che la soluzione particolare trovata fosse effettivamente corretta, sostituendola nell'equazione differenziale. Benché spesso non sia un passaggio necessario per la risoluzione dell'equazione, questo è il modo più semplice per accorgersi di aver commesso degli errori e per essere sicuri di aver giustificato rigorosamente il fatto che la funzione trovata risolva l'equazione.

Valutazione. In generale la maggior parte del voto è stata pensata per valutare la ricerca della soluzione particolare, piuttosto che per la determinazione della soluzione generale dell'inomogenea.

- Sono stati tolti 2 punti a coloro che hanno dichiarato che $y(x) = \cos(x)$ è una soluzione particolare, senza averlo giustificato;
- è stato assegnato in totale 1 solo punto per aver solo osservato che le soluzioni dell'equazione inomogenea si ottengono sommando una soluzione particolare alle soluzioni dell'omogenea associata;
- sono stati tolti 2 punti a coloro che hanno scritto la soluzione generale dell'equazione omogenea come $c_1e^{(5+i)x}+c_2e^{(5-i)x}$ affermando che le costanti c_1, c_2 devono essere *reali*;
- sono stati tolti 1, 2 o più punti per errori di conto più o meno gravi;
- non sono stati tolti punti per aver scritto frasi più o meno false o non rigorose, ma non necessarie ai fini dell'esercizio.

Per quanto riguarda le soluzioni presentate con il metodo della variazione delle costanti:

- Sono stati tolti 2 punti per la mancata determinazione esplicita del valore di ciascuna delle funzioni $c_1(x), c_2(x)$ (quindi fino ad un massimo di 4 punti tolti);

- è stato tolto 1 punto a quelli che hanno risolto il sistema lineare, senza accorgersi che tale passaggio è consentito solamente per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- sono stati assegnati in totale 3 punti per aver portato i conti fino alla fine, ma senza accorgersi di aver sbagliato a determinare in partenza le funzioni y_1, y_2.