

II Compitino

Primo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(u, v) = \int_0^1 (u''^2 + v''^2 + u^2 - 2uv + v^2) dx$$

nella classe

$$(u(x), v(x)) \in \{u(x) \in C^2[0, 1], v(x) \in C^2[0, 1], u(0) = 1, v(0) = 1, \\ u'(0) = 0, v'(0) = 0, u(1) = 0, v(1) = 0, u'(1) = 1, v'(1) = 1\}.$$

(a) Calcolare la variazione prima del funzionale. (b) Trovare il sistema delle equazioni di Eulero. (c) Trovare la soluzione di tale sistema che soddisfa le condizioni imposte. (d) Provare che la soluzione trovata nel punto precedente fornisce un minimo assoluto del funzionale.

Secondo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_1^2 y^6 y'^2 dx$$

nella classe delle funzioni

$$y(x) \in \{y(x) \in C_S^1[1, 2], y(1) = 2^{1/4}, y(2) = 3^{1/4}\}.$$

(a) Trovare l'estremale che soddisfa le condizioni imposte. (b) Provare che si tratta di un minimo assoluto.

Terzo esercizio

Trovare, tramite Maple, l'estremale del funzionale

$$J(x) = \int_0^\pi x'^2 dt$$

nella classe di funzioni

$$x(t) \in \{x(t) \in C_S^1[0, \pi], x(0) = 0, x(\pi) = 0, \int_0^\pi x(t) dt = 0, \\ \int_0^\pi tx(t) dt = 1, \int_0^\pi \cos(t)x(t) dt = 1\}.$$

Provare che l'estremale trovato é un minimo assoluto.