

**Meccanica Razionale e Analitica**  
Prima Prova in Itinere 27/4/04  
**USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI**

**Primo Esercizio**

(a) Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 \left[ 2 \frac{x(x+y^2)}{x^2+1} + \ln(x^2+1) + 2y \ln(x^2+1)y' \right] dx$$

definito nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 1]), y(0) = 0, y(1) = 1\}$$

è costante e calcolare tale costante.

(b) Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 \left( y'^2 + y^2 + \frac{2y}{\cosh x} \right) dx.$$

Provare che ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 1]), y(0) = 0\}$$

e trovare tale minimo.

(c) Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx$$

nella classe

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 1]), y(0) = 2e + 1, y(1) = 2, \int_0^1 y(x)e^{-x} dx = e\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

### Prova al Calcolatore

(1) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Trovare la forma di Jordan della matrice  $A$  e una matrice non singolare  $P$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

(3) Trovare la matrice  $e^{At}$ .

(4) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$Y' = AY, \quad Y(0) = (0, 0, 1, 1)^T.$$

(5) Trovare la soluzione del problema

$$Y'(x) = AY(x) + Q(x), \quad Y(0) = (0, 0, 0, 0)^T$$

con

$$Q(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 1 \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

(6) Trovare le primitive della funzione  $f(x) = x^6 \sqrt{x^2 + 5x + 7}$ .

(7) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x^6 \sqrt{x^2 + 5x + 7}$$

e trovarne il valore numerico con 7 cifre decimali.