Introduzione al concetto di infinito
Esercizi proposti

Massimo Caboara

Ricordiamo che una funzione $f : A \longrightarrow B$

- è surgettiva se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
- È iniettiva se per ogni $x, y \in A$ $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$
- è una corrispondenza biunivoca (è bigettiva) se è sia iniettiva che surgettiva.
- Ha inversa se esiste $g : b \longrightarrow A$ (l'inversa di f) tale che per ogni $b \in B$ $f(g(b)) = b$ e per ogni $a \in A$ $g(f(a)) = a$.

Esercizi

1. Data $f : A \longrightarrow B$ funzione, dimostrare che
$$f \text{ iniettiva e surgettiva} \Longleftrightarrow f \text{ ha inversa}$$
2. Costruire una funzione bigettiva esplicita tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.
3. Costruire una funzione bigettiva esplicita tra $(0, 1)$ e la retta reale.
4. Dimostrare che $\mid (0,1) \mid = \mid [0,1] \mid$ senza usare il teorema di Cantor-Schroeder-Bernstein.
5. Sia X un insieme. Dimostare che $\mid X \mid < \mid \wp(X) \mid$.
6. Siano A_1, A_2 insiemi numerabili. Dimostare che
$$A_1 \times A_2 = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$
è numerabile.
7. Siano $A_1, A_2, \ldots$ insiemi numerabili. Dimostare che
$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots$$
è numerabile. Come conseguenza, $\mathbb{Q}[x]$ (i polinomi a coefficienti razionali) è numerabile.

8. Siano $A_1, A_2, \ldots$ insiemi numerabili. Dimostare che
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
è numerabile.

9. Dimostrare il teorema di Cantor-Schroeder-Bernstein: Siano A, B insiemi con $\mid A \mid \geq \mid B \mid$ e $\mid B \mid \geq \mid A \mid$. Allora $\mid B \mid = \mid A \mid$. Difficile.